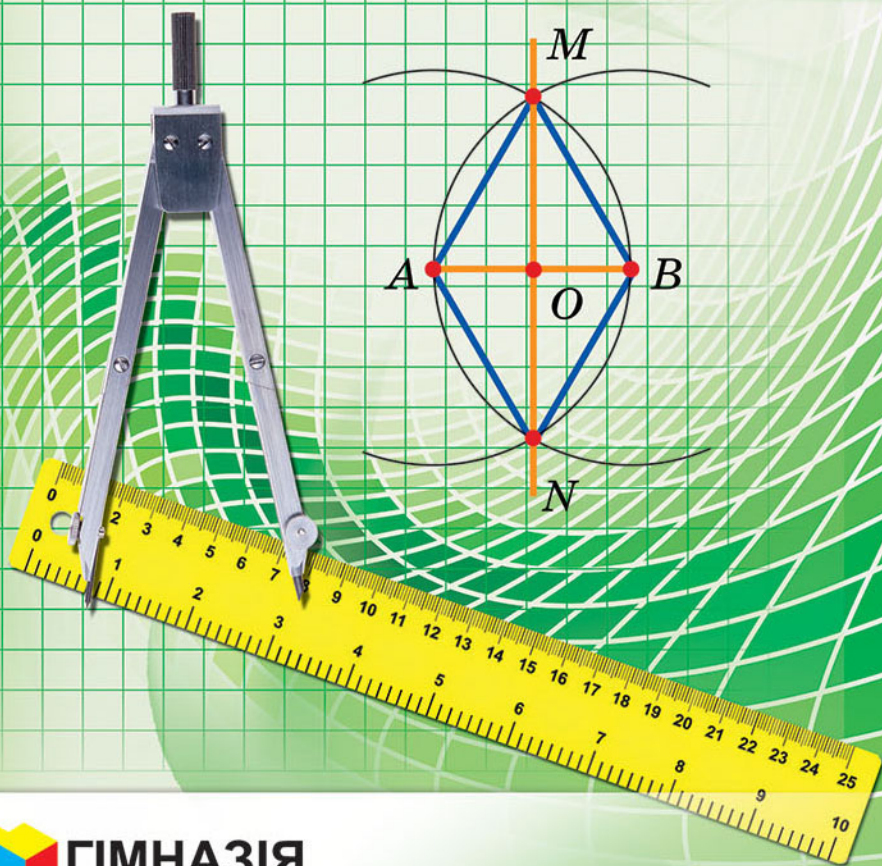


А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

7

ГЕОМЕТРІЯ



А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх
навчальних закладів

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Харків
«Гімназія»
2015

ВІД АВТОРІВ

УЧНЯМ

Любі семикласники!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **геометрію**. Зверніть увагу, що слова «**гео**графія» та «**гео**метрія» мають однакову частину — «гео», що в перекладі з грецької означає «земля». Проте якщо на уроках географії в 6 класі ви дійсно займалися землеописом («графія» грецькою — «опис»), то на уроках геометрії вам не доведеться займатися землемірянням («метрео» грецькою — «міряти»).

Геометрія — одна з найдавніших наук. Її назву можна пояснити тим, що зародження та розвиток геометрії були тісно пов'язані з різноманітною практичною діяльністю людини: розмічанням меж земельних ділянок, будівництвом шляхів, зрошувальних каналів та інших споруд, тобто геометрія, як говорять у таких випадках, була *прикладною наукою*. Поступово, крок за кроком людство накопичувало знання, і геометрія перетворилася на красиву та досконалу, строгу та послідовну математичну теорію. Знайомитися із цією наукою та вчитися застосовувати набуті знання на практиці ви й будете на уроках геометрії.

Знати геометрію надзвичайно важливо. Дійсно, подивіться навкруги — усюди геометрія, точніше, **геометричні фігури**: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо.



а



б

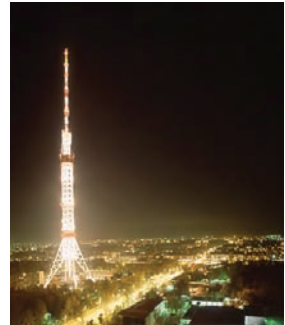


Рис. 2. Сирецька
телевізійна вежа
(м. Київ)

Рис. 1. Архітектурні споруди:
а — готель «Салют» (м. Київ);
б — адміністративна будівля (м. Лондон)

Без глибоких геометричних знань не могли з'явитися складні будівельні конструкції (рис. 1, 2), кораблі та літаки (рис. 3) і навіть деталі дитячого конструктора та узорів вишиванок (рис. 4). Створення узорів потребує від майстрині мати уявлення про такі геометричні поняття, як симетрія та паралельне перенесення. Не знаючи геометрії, неможливо стати хорошим інженером-конструктором, токарем, столяром, ученим, архітектором, дизайнером, модельєром, спеціалістом з комп'ютерної графіки тощо. Узагалі, знання з геометрії — важлива складова людської культури.

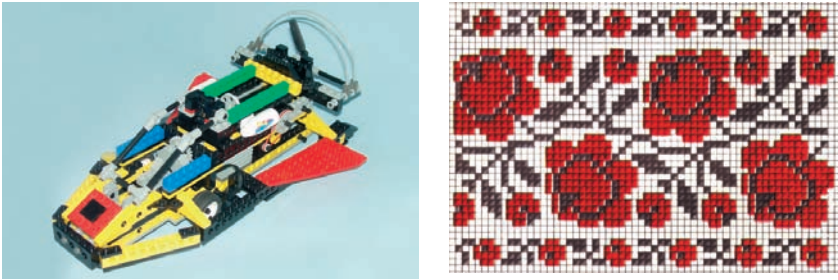


а



б

Рис. 3. Машинобудівні конструкції:
а — корабель на стапелях Миколаївського суднобудівного заводу;
б — літак Ан-225 («Мрія»)



а

б

Рис. 4. Геометрія в повсякденності:

а — дитячий конструктор; б — узор вишиванки

Геометрія — дуже цікавий предмет. Ми сподіваємося, що ви в цьому скоро переконаєтеся, чому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся з його структурою.

Підручник розділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, *жирним курсивом* і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати цікаві оповідання з історії геометрії.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

УЧИТЕЛЯМ

Шановні колеги!

У навчальній програмі з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів зазначено таке: «Зміст навчального матеріалу структуровано за темами відповідних навчальних курсів із визначенням кількості годин на їх вивчення. Такий розподіл змісту і навчального часу є орієнтовним. Учителів та авторам підручників надається право коригувати його залежно від прийнятої методичної концепції...».

Зважаючи на наведене, ми визнали за доцільне в другому параграфі підручника розглянути тему «Трикутники». Це дає змогу істотно урізноманітнити дидактичний матеріал параграфа «Паралельні прями».

Зрозуміло, що в межах загальноосвітньої школи неможливо реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії: покласти в основу систему аксіом, а далі будувати викладення дедуктивно, тобто доводити теореми логічно строго, базуючись на аксіомах і раніше доведених фактах. Це можна пояснити тим, що кількість учнів (особливо семикласників), схильних до дедуктивного мислення, обмежена. Насправді більшості притаманний наочно-образний тип мислення. Тому для дитини апеляція до наочної очевидності є цілком природною та виправданою.

На підставі викладеного, в основу цього підручника покладено **наочно-дедуктивний принцип у поєднанні із частковою аксіоматизацією**.

Ми вважаємо, що мета вивчення геометрії в школі — це не тільки розвиток логічного мислення та вміння проводити доведення. Автори підручника ставлять ширшу мету: уточнити уявлення учнів про елементарні геометричні об'єкти (точка, пряма, промінь, відрізок, кут), ознайомити їх з найважливішими властивостями базових фігур елементарної геометрії (трикутник, коло, чотирикутник тощо), розвинути в них потребу в доведенні, тобто закласти основи дедуктивного й евристичного мислення, а головне — **навчити учнів застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язування практичних і теоретичних задач**. Ми сподіваємося, що ви оціните цей підручник як такий, що допоможе в реалізації зазначених цілей.








У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, які рекомендовано для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

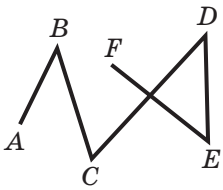
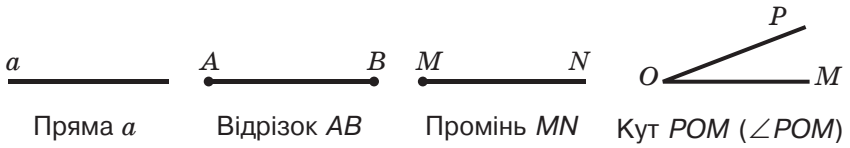
- n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
- n^{\bullet} завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
- $n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
- n^* задачі для математичних гуртків і факультативів;
-  ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
-  доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
-  доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
-  доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;
-  закінчення доведення теореми;
-  закінчення розв'язання задачі;
-  рубрика «Коли зроблено уроки».

Рівні відрізки на кресленнях позначено однаковою кількістю рисочок, рівні кути — однаковою кількістю дужок, за винятком відрізків і кутів, які треба знайти.

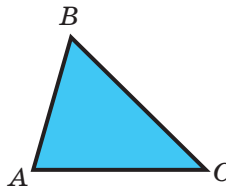
ВСТУП

Що вивчає геометрія?

Хоча геометрія — це новий для вас шкільний предмет, проте на уроках математики ви вже ознайомилися з азами цієї мудрої науки. Так, усі геометричні фігури, зображені на рисунку 5, вам добре відомі.



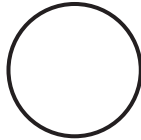
Ламана $ABCDEF$



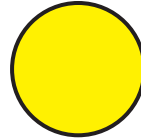
Трикутник ABC



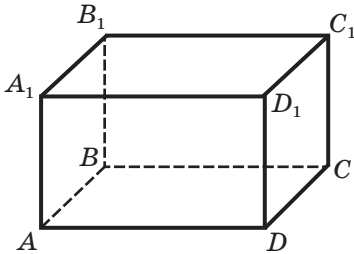
Прямокутник $ABCD$



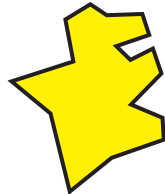
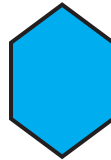
Коло



Круг



Прямокутний паралелепіпед
 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$



Многокутники

Рис. 5

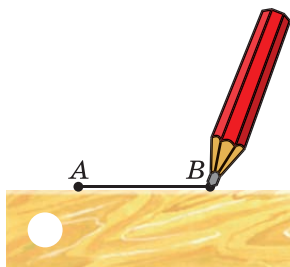


Рис. 6



Рис. 7

Ви вмієте за допомогою лінійки сполучати дві точки відрізком (рис. 6), за допомогою циркуля будувати коло (рис. 7), за допомогою лінійки й косинця будувати перпендикулярні та паралельні прямі (рис. 8), вимірювати довжину відрізка й будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки з міліметровими поділками (рис. 9), знаходити величину кута й будувати кут заданої величини за допомогою транспортира (рис. 10), класифікувати трикутники (див. форзац).

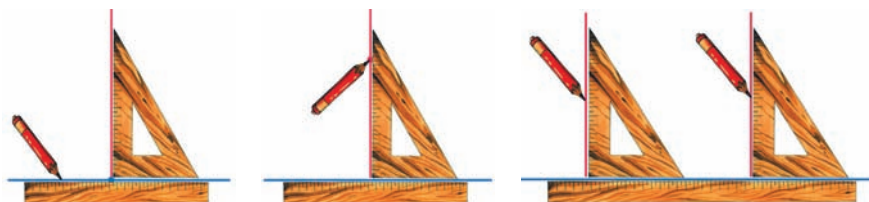


Рис. 8

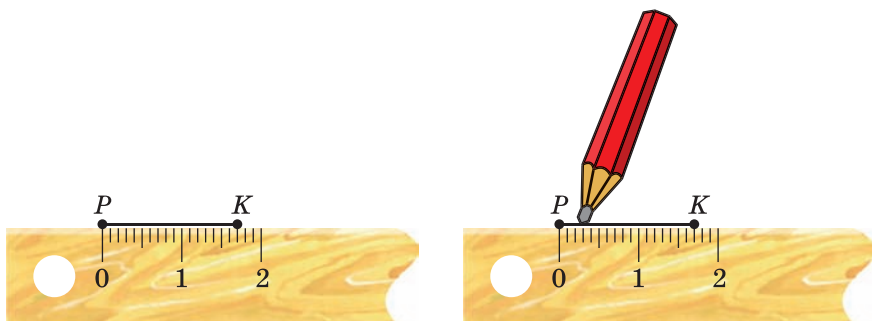


Рис. 9

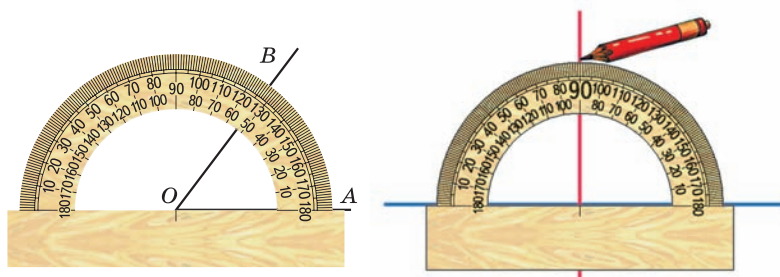


Рис. 10

Однак знати, який «вигляд» має фігура, або вміти виконувати прості побудови — це лише початкові знання *науки про властивості геометричних фігур*, тобто *геометрії*.

Під час вивчення *систематичного курсу* геометрії ви поступово, у певній послідовності вивчатимете властивості геометричних фігур, а отже, і самі фігури, як уже знайомі вам, так і нові. Це означає, що ви маєте навчитися за одними властивостями фігури встановлювати та, головне, **доводити** інші її властивості.

Шкільний курс геометрії традиційно поділяють на **планіметрію** та **стереометрію**. Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської — «площина»), стереометрія — фігури в просторі («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Отже, ми приступаємо до вивчення планіметрії.

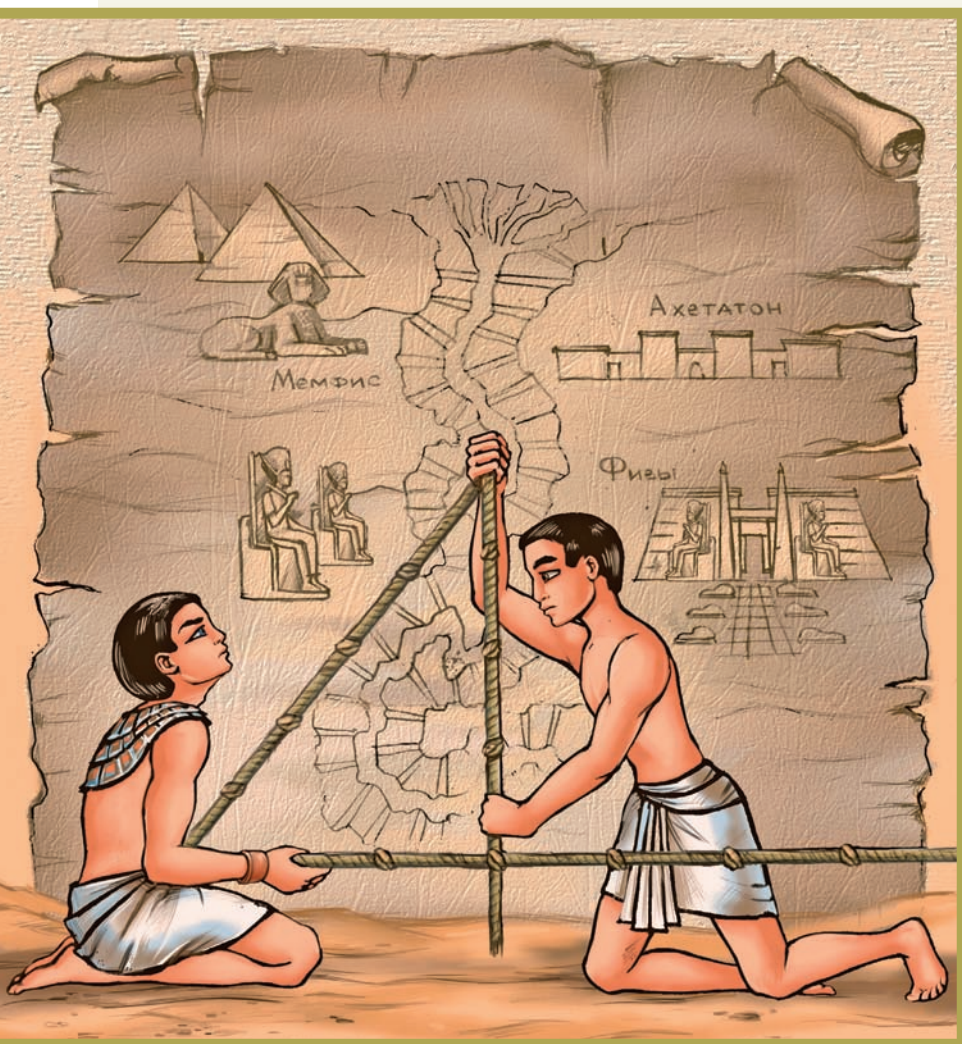
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ



§ 1

У цьому параграфі розглядаються знайомі вам з попередніх класів геометричні фігури, а саме: точки, прямі, відрізки, промені й кути.

Ви дізнаєтеся більше про властивості цих фігур. Деякі із цих властивостей навчитесь **доводити**. Слова **означення**, **теорема**, **аксіома** стануть для вас звичними, зрозумілими та часто вживаними.





1. Точки та прямі

Точка — найпростіша геометрична фігура. Це єдина фігура, яку неможливо розбити на частини. Наприклад, кожна з фігур, зображених на рисунку 11, розбита на частини. І навіть про фігуру, зображену на рисунку 12, яка складається з двох точок, можна сказати, що вона складається з двох частин: точки A й точки B .

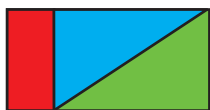


Рис. 11



Рис. 12

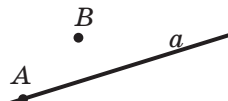


Рис. 13

На рисунку 13 зображено пряму a та дві точки A і B . Говорять, що *точка A належить прямій a* , або *точка A лежить на прямій a* , або *пряма a проходить через точку A* , і, відповідно, *точка B не належить прямій a* , або *точка B не лежить на прямій a* , або *пряма a не проходить через точку B* .

Пряма — це геометрична фігура, яка має певні властивості.

Основна властивість прямої. Через будь-які дві точки¹ можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Чому цю властивість прямої вважають основною?

Нехай про деяку лінію відомо лише те, що вона проходить через точки A і B . Для того щоб скласти уявлення про цю фігуру, такої інформації явно бракує. Адже через точки A і B можна провести багато різних ліній (рис. 14). Пряма ж задається цими точками однозначно. У цьому й полягає суть основної властивості прямої.

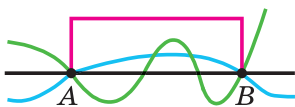
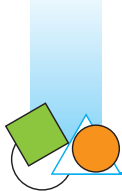


Рис. 14

Ця властивість дозволяє позначати пряму, називаючи дві будь-які її точки. Так, пряму, проведену через точки M і N , називають «пряма MN » (або «пряма NM »).

¹ Тут і далі, говорячи «дві точки», «три точки», «дві прямі» тощо, вважатимемо, що це різні точки й різні прямі. Випадок їх суміщення будемо обумовлювати окремо.



Основну властивість геометричної фігури ще називають аксіомою (докладніше про аксіоми ви дізнаєтеся в п. 6).

Якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміна), то використовують **означення**. Наприклад:

- 1) годинником називають прилад для вимірювання часу;
- 2) геометрія — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.

Означення використовують і в геометрії.

Означення. Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що **перетинаються**.

На рисунку 15 зображено прямі a і b , які перетинаються в точці O .

Часто справедливість (істинність) якого-небудь факту встановлюють за допомогою *логічних міркувань*.

Розглянемо таку задачу. Відомо, що всі мешканці Геометричної вулиці — математики. Євген живе за адресою вул. Геометрична, 5. Чи є Євген математиком?

За умовою задачі Євген живе на Геометричній вулиці. А оскільки всі мешканці цієї вулиці математики, то Євген — математик.

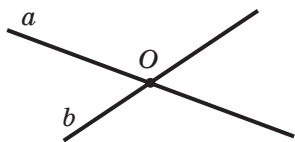


Рис. 15



Рис. 16

Наведені логічні міркування називають **доведенням** того факту, що Євген — математик.

У математиці твердження, істинність якого встановлюють за допомогою доведення, називають **теоремою**.

Теорема 1.1. *Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.*

Доведення. \odot Нехай прямі a і b , що перетинаються, крім спільної точки A , мають ще одну спільну точку B (рис. 16). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі.



А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне. ▲



1. Яку фігуру не можна розбити на частини?
2. Сформулюйте основну властивість прямої.
3. Яка властивість прямої дозволяє позначати її, називаючи будь-які дві точки прямої?
4. Для чого використовують означення?
5. Які дві прями називають такими, що перетинаються?
6. Як називають твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення?
7. Сформулюйте теорему про дві прями, що перетинаються.

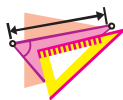


ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 1.° Проведіть пряму, позначте її буквою m . Позначте точки A і B , які лежать на цій прямій, і точки C , D , E , які не лежать на ній.
- 2.° Позначте точки M і K та проведіть через них пряму. Позначте на цій прямій точку E . Запишіть усі можливі позначення отриманої прямої.
- 3.° Проведіть прями a і b так, щоб вони перетиналися. Позначте точку їхнього перетину буквою C . Чи належить точка C прямій a ? прямій b ?
- 4.° Позначте три точки так, щоб вони не лежали на одній прямій, і через кожен пару точок проведіть пряму. Скільки утворилося прямих?
- 5.° Позначте чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій.
- 6.° Проведіть три прями так, щоб кожні дві з них перетиналися. Позначте точки перетину цих прямих. Скільки можна отримати точок перетину?



- 7.° Позначте чотири точки так, щоби при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку: 1) утворилася одна пряма; 2) утворилися чотири прямі; 3) утворилися шість прямих. Проведіть ці прямі.

**ВПРАВИ**

- 8.° Користуючись рисунком 17:

- 1) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a ; прямій MK ;
- 2) укажіть усі позначені точки, які не належать прямій a ; прямій MK ;
- 3) визначте, чи перетинаються прямі a і MK ;
- 4) укажіть усі позначені точки, які належать прямій a , але не належать прямій MK .

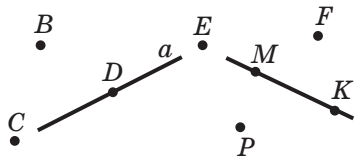


Рис. 17

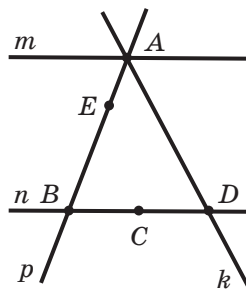


Рис. 18

- 9.° Користуючись рисунком 18, укажіть:

- 1) які з позначених точок належать прямій p , а які не належать їй;
- 2) яким прямим належить точка A ; точка B ; точка C ; точка D ; точка E ;
- 3) які прямі проходять через точку C ; точку B ; точку A ;
- 4) у якій точці перетинаються прямі k і p ; прямі m і k ;
- 5) у якій точці перетинаються три із чотирьох зображених на рисунку прямих.



- 10.* Точка C належить прямій AB . Чи є різними прямі AB і AC ? Відповідь обґрунтуйте.
- 11.* Провели чотири прямі, кожна дві з яких перетинаються, причому через кожну точку перетину проходять тільки дві прямі. Скільки точок перетину при цьому утворилося?
- 12.** Як треба розташувати шість точок, щоб вони визначали шість прямих?
- 13.** Дану пряму перетинають чотири прямі. Скільки може утворитися точок перетину цих прямих з даною?
- 14.** Провели чотири прямі, кожна дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?
- 15.** Провели п'ять прямих, кожна дві з яких перетинаються. Яка найменша можлива кількість точок перетину цих прямих? Яка найбільша кількість точок перетину може утворитися?
- 16.* Чи можна провести шість прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно чотири точки?
- 17.* На площині проведено три прямі. На першій прямій позначили п'ять точок, на другій — сім точок, а на третій — три точки. Яка найменша кількість точок може бути позначена?
- 18.* Чи можна позначити кілька точок і провести кілька прямих так, щоб на кожній прямій лежало рівно три позначені точки й через кожну точку проходило рівно три з проведених прямих?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

19. Складіть квадрат із кількох фігур, кожна з яких дорівнює фігурі, зображеній на рисунку 19.

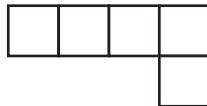


Рис. 19

2. Відрізок і його довжина

На рисунку 20 зображено пряму a , яка проходить через точки A і B . Ці точки обмежують частину прямої a , яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають **відрізком**, а точки A і B — **кінцями** цього відрізка.



Рис. 20



Рис. 21

Для будь-яких двох точок існує *єдиний* відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто *відрізок своїми кінцями задається однозначно*. Тому відрізок позначають, називаючи його кінці. Наприклад, відрізок, зображений на рисунку 21, позначають так: MN або NM (читають: «відрізок MN » або «відрізок NM »).

На рисунку 22 зображено відрізок AB і точку X , яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають **внутрішньою** точкою відрізка AB . У такому випадку також говорять, що точка X **лежить між** точками A і B .



Рис. 22

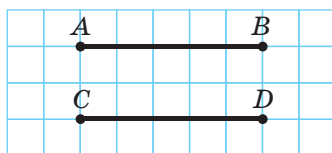


Рис. 23

Таким чином, відрізок AB складається з точок A і B , а також усіх точок прямої AB , які лежать між точками A і B .

Означення. Два відрізки називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 23 зображено рівні відрізки AB і CD . Пишуть: $AB = CD$.

Ви знаєте, що кожний відрізок має певну довжину й для її вимірювання треба вибрати **одичний відрізок**. За одичний можна взяти будь-який відрізок.

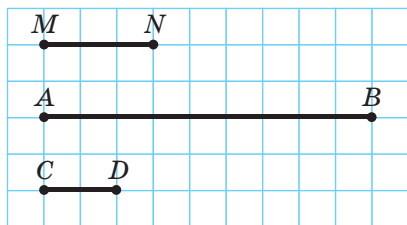


Рис. 24



Рис. 25

Наприклад, вважатимемо відрізок MN на рисунку 24 одиничним. Цей факт записують так: $MN = 1$ од. Тоді вважають, що довжина відрізка AB дорівнює трьом **одиницям довжини**, і записують: $AB = 3$ од. Також уживають запис $AB = 3$, його читають: «відрізок AB дорівнює трьом». Для відрізка CD маємо: $CD = \frac{2}{3}$.

На практиці найчастіше використовують такі одиничні відрізки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

Залежно від вибору одиниці довжини змінюється **числове значення довжини** відрізка. Наприклад, на рисунку 25 маємо: $AB = 17$ мм, або $AB = 1,7$ см, або $AB = 0,17$ дм тощо.

У виробництві та в побуті використовують різноманітні прилади для вимірювання довжини відрізка (рис. 26): лінійку з поділками, рулетку, штангенциркуль, мікрометр, польовий циркуль.



Лінійка з поділками



Рулетка



Штангенциркуль



Мікрометр



Польовий циркуль

Рис. 26



Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Якщо довжина відрізка AB більша за довжину відрізка MN , як, наприклад, на рисунку 24, то говорять, що відрізок AB більший за відрізок MN , і записують: $AB > MN$. Також можна сказати, що відрізок MN менший від відрізка AB , і записати: $MN < AB$.

Надалі, говорячи «сума відрізків», матимемо на увазі суму довжин цих відрізків.

Основна властивість довжини відрізка. Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB (рис. 27), тобто

$$AB = AC + CB.$$

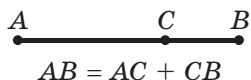


Рис. 27



Рис. 28



Рис. 29

Означення. Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB . Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Означення. Серединою відрізка AB називають таку його точку C , що $AC = CB$.

На рисунку 28 точка C — середина відрізка AB .

Задача. Точки A , B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC . Знайдіть відрізки¹ AC і BC .

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

1) Точка B — внутрішня точка відрізка AC (рис. 29). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB , тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

¹ Часто замість «Знайдіть довжину відрізка...» говорять: «Знайдіть відрізок...».



2) Точка C — внутрішня точка відрізка AB (рис. 30). У цьому випадку $AC + BC = AB$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x+2)$ см. Маємо:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.



Рис. 30



Рис. 31

3) Точка A — внутрішня точка відрізка BC (рис. 31). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см. ●



1. Скільки існує відрізків, кінцями яких є дві дані точки?
2. З яких точок складається відрізок AB ?
3. Які два відрізки називають рівними?
4. Чи можна будь-який відрізок узяти за одиничний?
5. Що можна сказати про довжини рівних відрізків?
6. Що можна сказати про відрізки, які мають рівні довжини?
7. Сформулюйте основну властивість довжини відрізка.
8. Що називають відстанню між двома точками?
9. Чому дорівнює відстань між двома точками, що збігаються?
10. Яку точку називають серединою відрізка AB ?

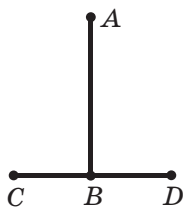


ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

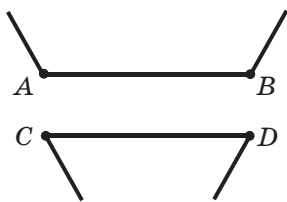
20.^о Позначте дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте точки C , D і E , які належать відріжку AB , і точки F , M і K , які не належать відріжку AB , але належать прямій AB .



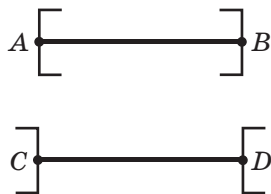
- 21.° Проведіть пряму та позначте на ній три точки. Скільки утворилося відрізків?
- 22.° Позначте на прямій точки A , B , C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B , а точка D — між точками B і C .
- 23.° Позначте на прямій точки A , B і C так, щоб виконувалася рівність $AC = AB + BC$.



а



б



в

Рис. 32

- 24.° Порівняйте на око відрізки AB і CD (рис. 32). Перевірте свій висновок вимірюванням.

- 25.° Порівняйте на око відрізки AB і BC (рис. 33). Перевірте свій висновок вимірюванням.

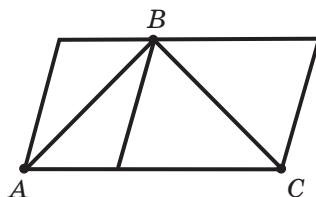
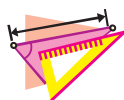
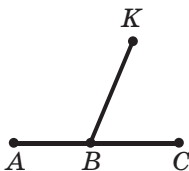


Рис. 33

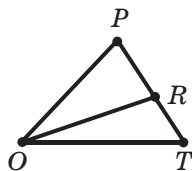


ВПРАВИ

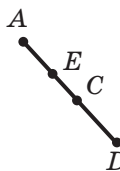
- 26.° Назвіть усі відрізки, які зображено на рисунку 34.



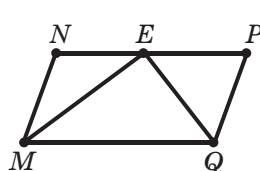
а



б



в



г

Рис. 34



- 27.° Знайдіть довжину кожного з відрізків, зображених на рисунку 35, якщо одиничний відрізок дорівнює відрізку: 1) AB ; 2) MN .

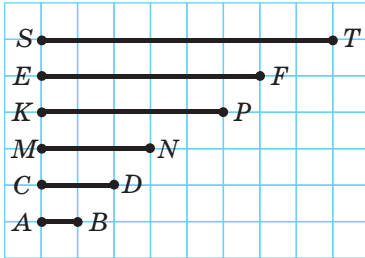


Рис. 35

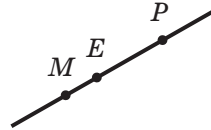


Рис. 36

- 28.° Яка з точок, позначених на рисунку 36, лежить між двома іншими? Запишіть відповідну рівність, що впливає з основної властивості довжини відрізка.
- 29.° Між якими точками лежить точка B (рис. 37)? Для кожного випадку запишіть відповідну рівність, яка впливає з основної властивості довжини відрізка.
- 30.° Точка D — внутрішня точка відрізка ME . Знайдіть:
- 1) відстань між точками M і E , якщо $MD = 1,8$ дм, $DE = 2,6$ дм;
 - 2) довжину відрізка MD , якщо $ME = 42$ мм, $DE = 1,5$ см.

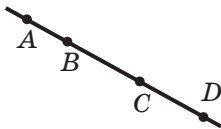
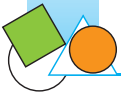


Рис. 37



Рис. 38

- 31.° Точки A , B і C лежать на одній прямій (рис. 38). Які з наведених тверджень правильні:
- 1) $AB + BC = AC$;
 - 2) $AC + AB = BC$?
- 32.° Точка K є серединою відрізка MN . Чи можна сумістити накладанням: 1) відрізки MK і KN ; 2) відрізки MK і MN ?



- 33.° Точка K — середина відрізка MN , точка E — середина відрізка KN , $EN = 5$ см. Знайдіть відрізки MK , ME і MN .
- 34.° Точка C — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 20 см. Знайдіть відрізки AC і BC , якщо:
- 1) відрізок AC на 5 см більший за відрізок BC ;
 - 2) відрізок AC у 4 рази менший від відрізка BC ;
 - 3) $AC : BC = 9 : 11$.
- 35.° Точка K належить відріжку CD , довжина якого дорівнює 28 см. Знайдіть відрізки CK і KD , якщо:
- 1) відрізок CK на 4 см менший від відрізка KD ;
 - 2) відрізок CK у 6 разів більший за відрізок KD ;
 - 3) $CK : KD = 3 : 4$.
- 36.° Відрізки AB і CD рівні (рис. 39). Доведіть, що відрізки AC і BD теж рівні.



Рис. 39

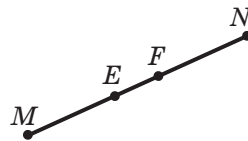


Рис. 40

- 37.° Відрізки ME і FN рівні (рис. 40). Доведіть, що $MF = EN$.
- 38.° Точка C ділить відрізок AB , довжина якого дорівнює a , на два відрізки. Знайдіть відстань між серединами відрізків AC і BC .
- 39.° Точки A , B і C лежать на одній прямій. Знайдіть відрізок BC , якщо $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Скільки розв'язків має задача?
- 40.° На прямій позначено точки A , B і C так, що $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і AC .
- 41.° Відрізок EF дорівнює 12 см. Знайдіть на прямій EF усі точки, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка EF дорівнює: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.
- 42.° Через точки A і B проведено пряму. Де на цій прямій лежить точка C , відстань від якої до точки B у 2 рази більша, ніж відстань від неї до точки A ?



- 43.** Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.
- 44.** Яку найменшу кількість внутрішніх точок треба позначити на відрізках, зображених на рисунку 41, щоб на кожному з них було позначено по дві внутрішні точки?

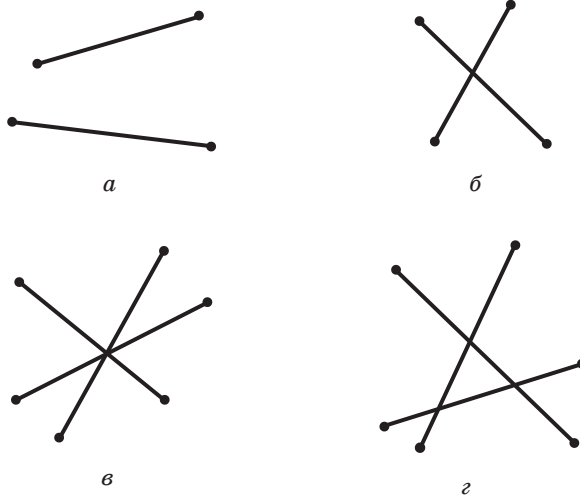


Рис. 41

- 45.** Скільки точок треба позначити між точками A і B , щоб разом з відрізком AB утворилося шість відрізків?
- 46.** На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 5 см і 13 см (рис. 42). Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?
- 47.** На шкалі лінійки нанесено тільки поділки 0 см, 7 см і 11 см. Як, користуючись цією лінійкою, можна побудувати відрізок завдовжки: 1) 8 см; 2) 5 см?

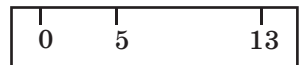


Рис. 42

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

48. Із прямокутників розмірами 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів

Проведемо пряму AB і позначимо на ній довільну точку O . Ця точка розбиває пряму на дві частини, які виділено на рисунку 43 різними кольорами. Кожну із цих частин разом з точкою O називають **променем** або **півпрямую**. Точку O називають **початком** променя.

Кожний із променів, які зображено на рисунку 43, складається з точки O та всіх точок прямої AB , що *лежать по один бік від точки O* .



Рис. 43

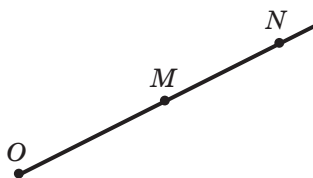


Рис. 44

Це дає змогу позначати промінь, називаючи дві його точки: першою обов'язково вказують початок променя, другою — будь-яку іншу точку, яка належить променю. Так, промінь з початком у точці O (рис. 44) можна позначити OM або ON .

Промені OA та OB (рис. 43) доповнюють один одного до прямої. Також можна сказати, що об'єднанням цих променів є пряма.

Означення. Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають **ДОВОПНЯЛЬНИМИ**.

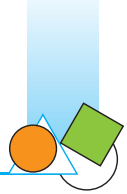


Рис. 45

Наприклад, промені BC і BA — доповняльні (рис. 45). Їхнім об'єднанням є пряма AC . Зауважимо, що, об'єднавши промені CA та AC , ми також отримаємо пряму AC . Проте ці промені не є доповняльними: у них немає спільного початку.

На рисунку 46, *a* зображено фігуру, яка складається з двох променів OA та OB , що мають спільний початок. Ця фігура ділить площину на дві частини, які виділено різними кольорами. Кожну із цих частин разом із променями OA та OB називають кутом.

Промені OA та OB називають **сторонами кута**, а точку O — **вершиною кута**.

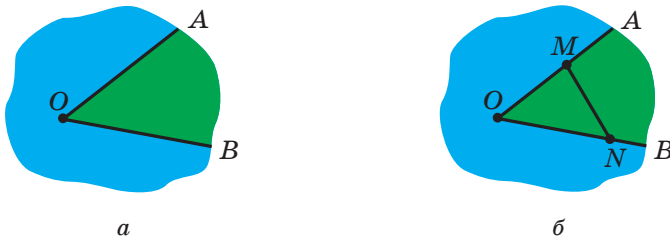


Рис. 46

Як бачимо, кути на рисунку 46, *a* зовні суттєво відрізняються. Ця відмінність визначена такою властивістю. На променях OA та OB виберемо довільні точки M і N (рис. 46, *б*). Відрізок MN належить «**зеленому**» куту, а «**синьому**» куту належать лише кінці відрізка.

Надалі, говорячи «кут», матимемо на увазі лише той, який містить будь-який відрізок із кінцями на його сторонах. Ситуації, коли розглядатимуться кути, для яких ця умова не виконується, будуть спеціально обумовлені.

Існує кілька способів позначення кутів. Кут на рисунку 47 можна позначити так: $\angle MON$, або $\angle NOM$, або просто $\angle O$ (читають відповідно: «кут MON », «кут NOM », «кут O »).

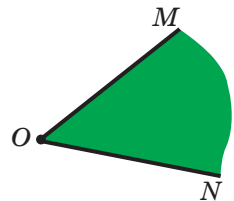
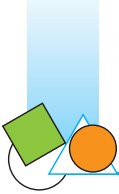


Рис. 47



На рисунку 48 зображено кілька кутів, які мають спільну вершину. Тут позначення кута однією буквою може призвести до плутанини. У таких випадках кути зручно позначати за допомогою цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читають відповідно: «кут один», «кут два», «кут три»).

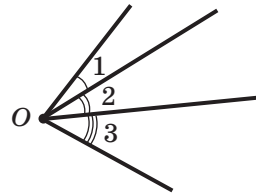


Рис. 48

Означення. Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають **розгорнутим**.

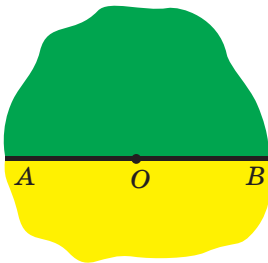


Рис. 49



Рис. 50

На рисунку 49 промені OA та OB є доповняльними, тому кути, виділені зеленим і жовтим кольорами, є розгорнутими.

Будь-яка пряма ділить площину на дві **півплощини**, для яких ця пряма є **межею** (рис. 50). Вважають, що пряма належить кожній із двох півплощин, для яких вона є межею. А оскільки сторони розгорнутого кута утворюють пряму, то можна сказати, що розгорнутий кут — це півплощина, на межі якої позначено точку — вершину кута.

Означення. Два кути називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 51 зображено рівні кути ABC і MNK . Пишуть: $\angle ABC = \angle MNK$.

Зрозуміло, що всі розгорнуті кути рівні.

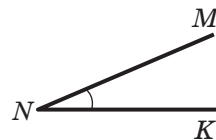
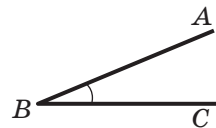


Рис. 51



На рисунку 52 зображено кут AOB і промінь OC , який належить цьому куту, проте відмінний від його сторін. Говорять, що промінь OC *проходить між сторонами кута AOB* і ділить його на два кути AOC і COB .

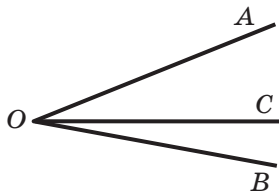


Рис. 52

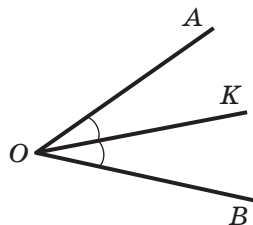


Рис. 53

Означення. **Бісектрисою** кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

На рисунку 53 промінь OK — бісектриса кута AOB . Отже, $\angle AOK = \angle KOB$.

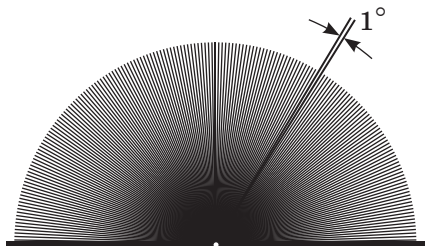


Рис. 54

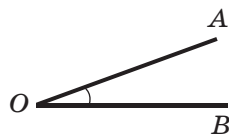
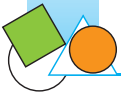


Рис. 55

Ви знаєте, що кожний кут має величину. Для її вимірювання треба вибрати одиницю виміру — **одичний кут**. Вибрати його можна, наприклад, так. Розділимо розгорнутий кут на 180 рівних кутів (рис. 54). Кут, утворений двома сусідніми променями, беруть за одиничний. Його величину називають **градусом** і записують: 1° .

Наприклад, градусна міра (величина) кута AOB (рис. 55) дорівнює 20° (цей факт легко встановити за допомогою



транспортира). У цьому випадку говорять, що кут AOB дорівнює 20° , і записують: $\angle AOB = 20^\circ$.

Із прийнятого означення градуса випливає, що *градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°* .

На рисунку 56, *а* зображено старовинний кутомірний прилад астролябію (у перекладі з грецької — «та, що хапає зорі»). Багато століть саме такий прилад допомагав мореплавцям знаходити шлях, астрономам — визначати положення зір. У наш час для вимірювання кутів на практиці використовують астролябію (рис. 56, *б*), а також інші прилади спеціального призначення: теодоліт (рис. 57) — для вимірювання на місцевості, бусоль (рис. 58) — в артилерії, секстант (рис. 59) — у морській справі.

*а**б*

Рис. 58. Бусоль

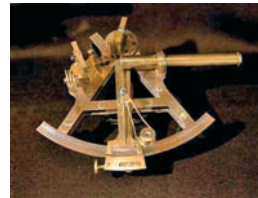


Рис. 59. Секстант

Рис. 56. Астролябія: *а* — старовинна;
б — сучасна

Рис. 57. Теодоліт

Для отримання більш точних результатів вимірювання кутів використовують частини градуса: $\frac{1}{60}$ градуса дорівнює одній хвилині ($1'$), тобто $1^\circ = 60'$; $\frac{1}{60}$ хвилини називають секундою ($1''$), тобто $1' = 60''$. Наприклад, запис $23^\circ 15' 11''$ означає, що градусна міра кута становить 23 градуси 15 хвилин 11 секунд.



Існують також інші одиниці виміру кутів: наприклад, у морській справі користуються одиницею 1 румб ($11^\circ 15'$).

Означення. Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають **прямим**. Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають **гострим**. Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають **тупим**.

На рисунку 60 зображено кути кожного з трьох указаних видів.



Прямий кут

Гострий кут

Тупий кут

Рис. 60

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

Якщо величина кута ABC більша за величину кута MNP , то говорять, що кут ABC більший за кут MNP , і записують: $\angle ABC > \angle MNP$. Також говорять, що кут MNP менший від кута ABC , і записують: $\angle MNP < \angle ABC$.

Надалі, говорячи «сума кутів», матимемо на увазі суму величин цих кутів.

Основна властивість величини кута. Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (рис. 61).

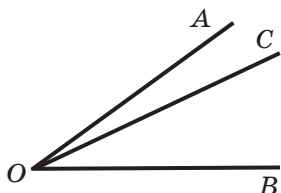


Рис. 61

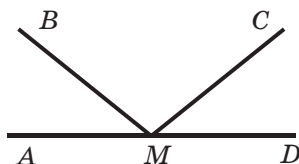


Рис. 62



Задача. На рисунку 62 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$.
Знайдіть кут¹ AMB .

Розв'язання. Маємо: $\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,
 $\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Оскільки $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

Запишемо: $\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

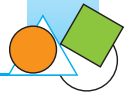
Тоді $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$. Звідси $\angle AMB = 31^\circ$.

Відповідь: 31° . ●



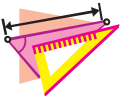
1. Як називають фігуру, утворену точкою, що належить прямій, та однією із частин, на які ця точка ділить пряму? Як при цьому називають дану точку?
2. Як позначають промінь?
3. Які два промені називають доповняльними?
4. Як називають фігуру, утворену двома променями зі спільним початком та однією із частин, на які ці промені ділять площину? Як при цьому називають дані промені? їхній спільний початок?
5. Як позначають кут?
6. Який кут називають розгорнутим?
7. Як називають частини, на які пряма ділить площину?
8. Які два кути називають рівними?
9. Що називають бісектрисою кута?
10. У яких одиницях вимірюють кути?
11. Яка градусна міра розгорнутого кута?
12. Як називають кут, градусна міра якого дорівнює 90° ?
13. Який кут називають гострим?
14. Який кут називають тупим?
15. Що можна сказати про величини рівних кутів?
16. Що можна сказати про кути, величини яких рівні?
17. Сформулюйте основну властивість величини кута.

¹ Часто замість «Знайдіть градусну міру кута...» говорять: «Знайдіть кут...».



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 49.° Проведіть два промені AB і AC так, щоб вони не були доповняльними. Побудуйте до кожного із цих променів доповняльний промінь. Позначте й запишіть усі утворені промені.
- 50.° Проведіть відрізок AB і два промені AB і BA . Чи є ці промені доповняльними? Відповідь обґрунтуйте.
- 51.° Накресліть кут MNE і проведіть промені NA і NC між його сторонами. Запишіть усі кути, що утворилися.
- 52.° Проведіть промені OA , OB , OC і OD так, щоби промінь OC проходив між сторонами кута AOB , а промінь OD — між сторонами кута BOC .
- 53.° Накресліть два промені так, щоб їхня спільна частина була: 1) точкою; 2) відрізком; 3) променем.



ВПРАВИ

- 54.° Пряма EF перетинає прямі AB і CD (рис. 63). Укажіть: 1) усі промені, що утворилися, з початком у точці M ; 2) усі пари доповняльних променів з початком у точці K .
- 55.° Запишіть усі промені, які зображено на рисунку 64. Укажіть, які з них є доповняльними променями з початком у точці O .

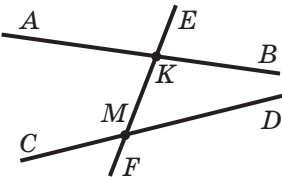


Рис. 63

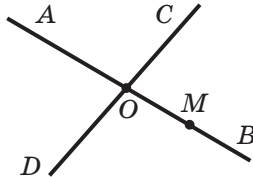


Рис. 64

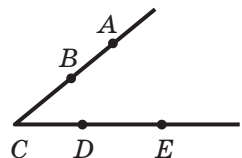
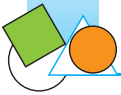


Рис. 65

- 56.° Чи можна кут, який зображено на рисунку 65, позначити так:
- | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1) $\angle ABC$; | 3) $\angle ADC$; | 5) $\angle ACE$; | 7) $\angle BDE$; |
| 2) $\angle ACD$; | 4) $\angle DCA$; | 6) $\angle BCD$; | 8) $\angle ECD$? |



57.° Запишіть усі кути, які зображено на рисунку 66.

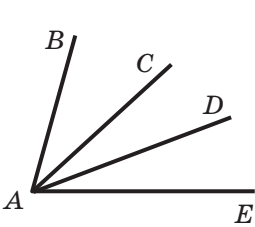


Рис. 66

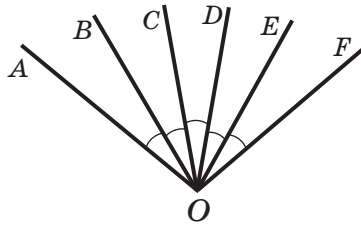


Рис. 67

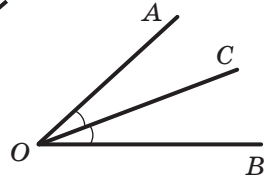


Рис. 68

58.° На рисунку 67 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

- 1) Який промінь є бісектрисою кута AOC ? кута DOF ? кута BOF ?
- 2) Бісектрисою яких кутів є промінь OC ?

59.° На рисунку 68 промінь OC — бісектриса кута AOB . Чи можна сумістити накладанням: 1) кути AOC і BOC ; 2) кути AOC і AOB ?

60.° Промінь BD ділить кут ABC на два кути. Знайдіть:

- 1) кут ABC , якщо $\angle ABD = 54^\circ$, $\angle CBD = 72^\circ$;
- 2) кут CBD , якщо $\angle ABC = 158^\circ$, $\angle ABD = 93^\circ$.

61.° Промінь OP проходить між сторонами кута $МОК$. Знайдіть кут $МОР$, якщо $\angle МОК = 172^\circ$, $\angle РОК = 85^\circ$.

62.° Чи є правильним твердження:

- 1) будь-який кут, менший від тупого, — гострий;
- 2) кут, менший від розгорнутого, — тупий;
- 3) кут, менший від тупого у 2 рази, — гострий;
- 4) сума двох гострих кутів більша за прямий кут;
- 5) кут, менший від розгорнутого кута у 2 рази, є більшим за будь-який гострий кут;
- 6) кут, більший за прямий, — тупий?

63.° Із вершини прямого кута $ВОМ$ (рис. 69) проведено два промені OA та OC так, що $\angle BOC = 74^\circ$, $\angle AOM = 62^\circ$. Знайдіть кут AOC .

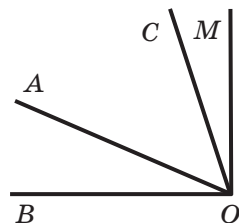
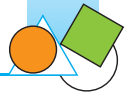


Рис. 69



64.° Із вершини розгорнутого кута ACP (рис. 70) проведено два промені CT і CF так, що $\angle ACF = 158^\circ$, $\angle TCF = 134^\circ$. Знайдіть кут TCF .

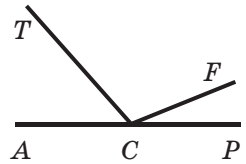


Рис. 70

65.° Кут CEF дорівнює 152° , промінь EM проходить між його сторонами, кут CEM на 18° більший за кут FEM . Знайдіть кути CEM і FEM .

66.° Промінь AK належить куту BAD . Знайдіть кути BAK і DAK , якщо кут BAK у 7 разів менший від кута DAK і $\angle BAD = 72^\circ$.

67.° На рисунку 71 рівні кути позначено дужками. Знайдіть кути ABC , MKE і STK , якщо за одиничний кут узято: 1) кут ABC ; 2) кут MKE .

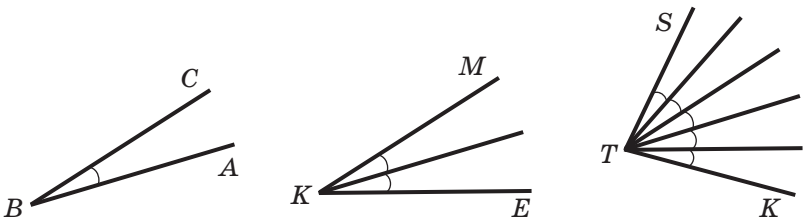


Рис. 71

68.° Точки A , B і C розміщено на прямій так, що $AB = 3,2$ см, $AC = 4,8$ см, $BC = 8$ см. Чи є промені AB і AC доповняльними?

69.° На рисунку 72 кут ABC прямий, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, промені BD і BK — бісектриси кутів ABE і FBC відповідно. Знайдіть кут DBK .

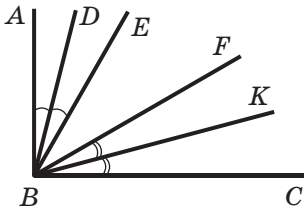


Рис. 72

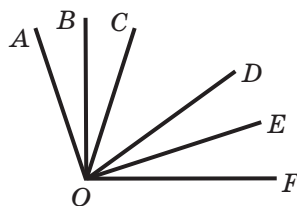


Рис. 73

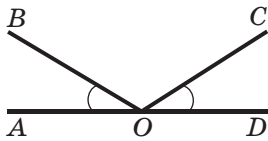


Рис. 74

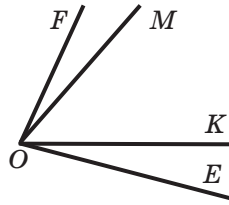


Рис. 75

- 70.* На рисунку 73 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, промінь OB — бісектриса кута AOC , промінь OE — бісектриса кута DOF , $\angle BOE = 72^\circ$. Знайдіть кут AOF .
- 71.* На рисунку 74 $\angle AOB = \angle DOC$. Чи є ще на цьому рисунку рівні кути? Відповідь обґрунтуйте.
- 72.* Кути FOK і MOE рівні (рис. 75). Чи рівні кути FOM і KOE ?
- 73.* Промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 76). Знайдіть кут CBD .
- 74.* Промінь BK є бісектрисою кута CBD , $\angle CBD = 54^\circ$ (рис. 76). Знайдіть кут ABK .
- 75.* На скільки градусів повертається за 1 хв: 1) хвилинна стрілка; 2) годинна стрілка?
- 76.* Знайдіть кут між стрілками годинника, якщо вони показують: 1) 3 год; 2) 6 год; 3) 4 год; 4) 11 год; 5) 7 год.
- 77.** Кут ABC дорівнює 30° , кут CBD — 80° . Знайдіть кут ABD . Скільки розв'язків має задача?
- 78.** Знайдіть кут $МОК$, якщо $\angle MON = 120^\circ$, $\angle KON = 43^\circ$. Скільки розв'язків має задача?
- 79.** Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить його на два кути. Доведіть, що кут між бісектрисами кутів, що утворилися, дорівнює 45° .
- 80.** Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 70° , побудувати кут, який дорівнює 40° ?
- 81.** Як, маючи шаблон кута, що дорівнює 40° , побудувати кут, який дорівнює: 1) 80° ; 2) 160° ; 3) 20° ?

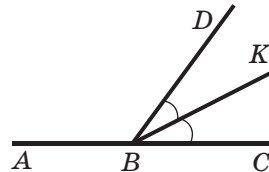


Рис. 76



- 82.** Як, використовуючи шаблон кута, що дорівнює 13° , побудувати кут, який дорівнює 2° ?
- 83.* Як побудувати кут, який дорівнює 1° , використовуючи шаблон кута, що дорівнює: 1) 19° ; 2) 7° ?
- 84.* Проведіть шість прямих, що перетинаються в одній точці. Чи правильно, що серед кутів, які при цьому утворилися, є кут, менший від 31° ?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

85. Не відриваючи олівця від паперу, проведіть через дев'ять точок (рис. 77) чотири відрізки (повертатися у вихідну точку не обов'язково).

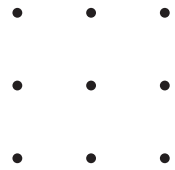


Рис. 77

4. Суміжні та вертикальні кути

Означення. Два кути називають **суміжними**, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

На рисунку 78 кути $\angle MOE$ і $\angle EON$ суміжні.

Теорема 4.1. Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Доведення. ☉ Нехай кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні (рис. 79). Треба довести, що $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$.

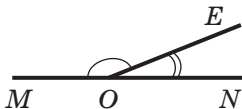


Рис. 78

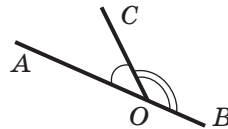
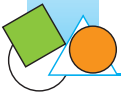


Рис. 79

Оскільки кути $\angle AOC$ і $\angle COB$ суміжні, то промені OA та OB є доповняльними. Тоді кут $\angle AOB$ розгорнутий. Отже, $\angle AOB = 180^\circ$. Промінь OC належить куту $\angle AOB$. За основною властивістю величини кута маємо: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ▲



Означення. Два кути називають **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

На рисунку 80 кути AOB і COD вертикальні.

Очевидно, що при перетині двох прямих утворюються дві пари вертикальних кутів, відмінних від розгорнутого. На рисунку 80 кути AOC і BOD також вертикальні.

Теорема 4.2 *Вертикальні кути рівні.*

Доведення. ☉ Якщо вертикальні кути є розгорнутими, то вони рівні.

На рисунку 81 кути 1 і 2 вертикальні та відмінні від розгорнутого. Треба довести, що $\angle 1 = \angle 2$.

Кожний із кутів 1 і 2 суміжний із кутом 3. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ і $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Звідси $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ і $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Отримуємо, що градусні міри кутів 1 і 2 рівні, а отже, рівні й самі кути. ▲

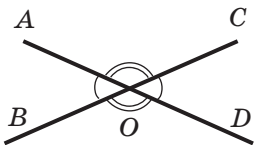


Рис. 80

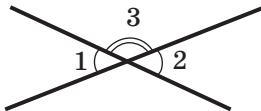


Рис. 81

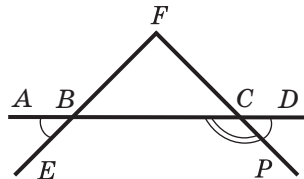


Рис. 82

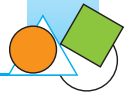
Задача. На рисунку 82 $\angle ABE = \angle DCP$. Доведіть, що $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Розв'язання. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, оскільки кути DCP і BCP суміжні. Кути DCP і ABE рівні за умовою. Кути ABE і FBC рівні як вертикальні.

Отже, $\angle DCP = \angle FBC$. Тоді $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$. ●

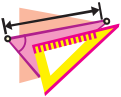


1. Які два кути називають суміжними?
2. Чому дорівнює сума суміжних кутів?
3. Які два кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте теорему про властивість вертикальних кутів.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 86.° Накресліть три кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут.
- 87.° Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона була вертикальною.



ВПРАВИ

- 88.° Укажіть пари суміжних кутів (рис. 83).

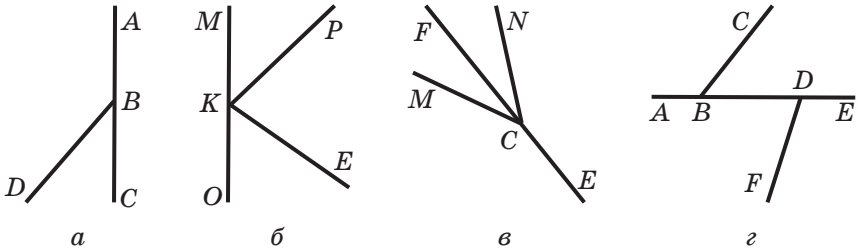


Рис. 83

- 89.° Чи є кути ABC і DBE вертикальними (рис. 84)?

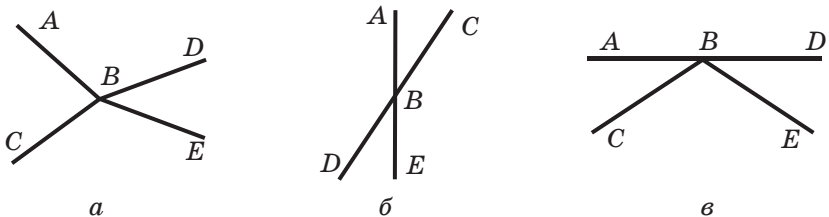


Рис. 84

- 90.° Скільки пар суміжних кутів зображено на рисунку 85? Назвіть їх. Укажіть пари вертикальних кутів.
- 91.° Чи можуть два суміжних кути дорівнювати: 1) 24° і 156° ; 2) 63° і 107° ? Відповідь обґрунтуйте.

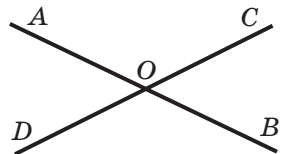
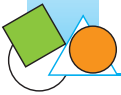


Рис. 85



- 92.° Знайдіть кут, суміжний із кутом: 1) 29° ; 2) 84° ; 3) 98° ; 4) 135° .
- 93.° Чи може пара суміжних кутів складатися:
- 1) із двох гострих кутів;
 - 2) із двох тупих кутів;
 - 3) із прямого та тупого кутів;
 - 4) із прямого та гострого кутів?
- 94.° Один із суміжних кутів прямий. Яким є другий кут?
- 95.° Знайдіть кут, суміжний із кутом ABC , якщо: 1) $\angle ABC = 36^\circ$; 2) $\angle ABC = 102^\circ$.
- 96.° Знайдіть кути 2, 3 і 4 (рис. 86), якщо $\angle 1 = 42^\circ$.
- 97.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
- 1) один із них на 70° більший за другий;
 - 2) один із них у 8 разів менший від другого;
 - 3) їхні градусні міри відносяться як 3 : 2.
- 98.° Знайдіть суміжні кути, якщо:
- 1) один із них у 17 разів більший за другий;
 - 2) їхні градусні міри відносяться як 19 : 26.
- 99.° Чи є правильним твердження:
- 1) для кожного кута можна побудувати тільки один вертикальний кут;
 - 2) для кожного кута, відмінного від розгорнутого, можна побудувати тільки один суміжний кут;
 - 3) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
 - 4) якщо кути не рівні, то вони не вертикальні;
 - 5) якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;
 - 6) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а другий — тупий;
 - 7) якщо два кути суміжні, то один із них більший за другий;
 - 8) якщо сума двох кутів дорівнює 180° , то вони суміжні;
 - 9) якщо сума двох кутів не дорівнює 180° , то вони не суміжні;
 - 10) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;

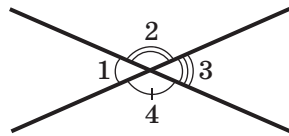


Рис. 86



- 11) якщо суміжні кути рівні, то вони прямі;
 12) якщо рівні кути мають спільну вершину, то вони вертикальні;
 13) якщо два кути мають спільну сторону, то вони суміжні?
- 100.** Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 140° . Доведіть, що ці кути вертикальні.
- 101.** Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо:
 1) сума двох із них дорівнює 106° ;
 2) сума трьох із них дорівнює 305° .
- 102.** Знайдіть кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює 64° .
- 103.** Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 87). Знайдіть суму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.
- 104.** Прямі AB , CD і MK перетинаються в точці O (рис. 88), $\angle AOC = 70^\circ$, $\angle MOB = 15^\circ$. Знайдіть кути $\angle DOK$, $\angle AOM$ і $\angle AOD$.
- 105.** Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.
- 106.** Знайдіть кут між бісектрисами вертикальних кутів.
- 107.** Кути $\angle ABF$ і $\angle FBC$ суміжні, $\angle ABF = 80^\circ$, промінь BD належить куту $\angle ABF$, $\angle ABD = 30^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів $\angle DBF$ і $\angle FBC$.
- 108.** Кути $\angle AOB$ і $\angle BOC$ суміжні, промінь OD — бісектриса кута $\angle AOB$, кут $\angle BOD$ на 18° менший від кута $\angle BOC$. Знайдіть кути $\angle AOB$ і $\angle BOC$.
- 109.** Знайдіть суміжні кути $\angle MKE$ і $\angle PKE$, якщо кут $\angle FKE$ на 24° більший за кут $\angle PKE$, де промінь KF — бісектриса кута $\angle MKE$.

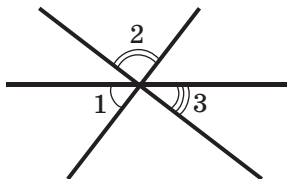


Рис. 87

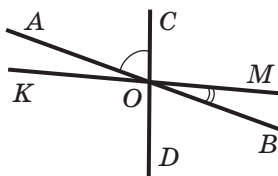


Рис. 88

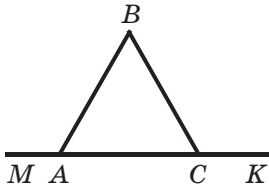
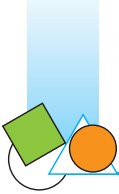


Рис. 89

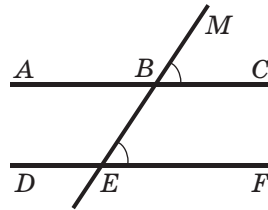


Рис. 90

110. На рисунку 89 $\angle MAB + \angle ACB = 180^\circ$. Доведіть, що $\angle MAB = \angle KCB$.
111. На рисунку 90 $\angle MBC = \angle BEF$. Доведіть, що $\angle ABE + \angle BED = 180^\circ$.
112. Два кути мають спільну сторону, а їхня сума дорівнює 180° . Чи можна стверджувати, що ці кути є суміжними?



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

113. Розріжте фігуру, зображену на рисунку 91, на шість частин двома прямими.

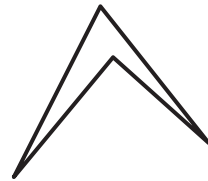


Рис. 91

5. Перпендикулярні прямі

На рисунку 92 позначено чотири кути, утворені при перетині прямих a і b . Легко показати (зробіть це самостійно), що коли один із кутів прямий (наприклад, кут 1), то й кути 2, 3 і 4 теж прямі.

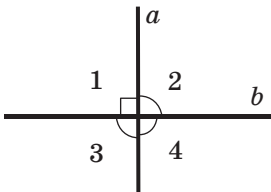


Рис. 92

Означення. Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

На рисунку 92 прямі a і b перпендикулярні. Пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

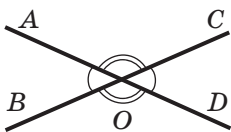


Рис. 93

На рисунку 93 прямі AD і BC не перпендикулярні. При їхньому перетині утворилися пара рівних гострих кутів і пара рівних тупих кутів. Величину гострого кута, що утворився, називають **кутом між прямими AD і BC** .

Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90° .

Зі сказаного випливає, що кут між двома прямими не перевищує 90° .

Означення. Два відрізки називають **перпендикулярними**, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

На рисунку 94 відрізки AB і CD перпендикулярні. Пишуть: $AB \perp CD$.

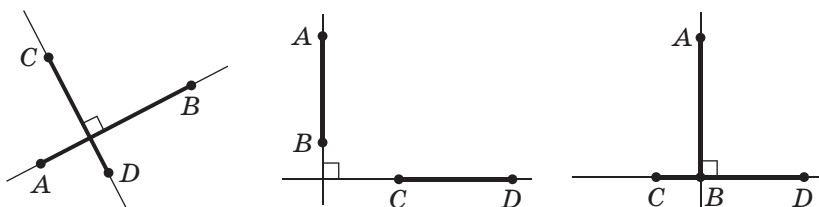


Рис. 94

Так само можна розглядати перпендикулярність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 95 зображено перпендикулярні відрізок CD і промінь AB .

На рисунку 96 зображено пряму a та перпендикулярний до неї відрізок AB , кінець B якого належить прямій a .

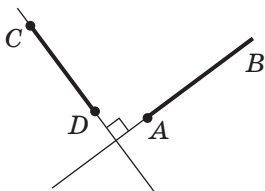


Рис. 95

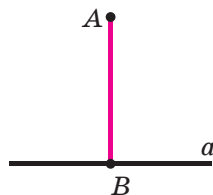
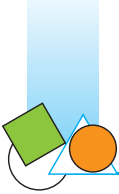


Рис. 96



У такому випадку говорять, що з точки A на пряму a опущено перпендикуляр AB . Точку B називають основою перпендикуляра AB .

Довжину перпендикуляра AB називають відстанню від точки A до прямої a . Якщо точка A належить прямій a , то природно вважати, що відстань від точки A до прямої a дорівнює нулю.

На рисунку 97 зображено перпендикуляр OM , який опущено з точки O на пряму AB . Якщо основа цього перпендикуляра, точка M , належить відрізку AB (променю AB), то довжину відрізка OM називають відстанню від точки O до відрізка AB (променя AB).

Якщо точка належить відрізку (променю), то природно вважати, що відстань від цієї точки до відрізка (променя) дорівнює нулю.

Опустимо з точки A на пряму a перпендикуляр AB (рис. 98). Нехай X — довільна точка прямої a , відмінна від точки B . Відрізок AX називають похилою, проведеною з точки A до прямої a .

Теорема 5.1. *Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.*

Доведення. \odot Позначимо на прямій AB довільну точку M і побудуємо прямий кут CMB (рис. 99). Тоді $CM \perp AB$.

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма MD , відмінна від CM і перпендикулярна до прямої AB .

Розглянемо випадок, коли промінь MD належить куту CMB . Тоді за основною властивістю величини кута $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Звідси $\angle CMB > \angle DMB$. Проте насправді

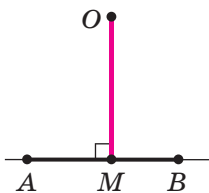


Рис. 97

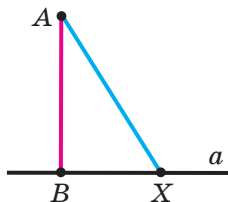


Рис. 98

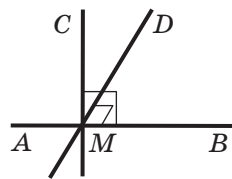


Рис. 99

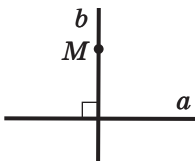


Рис. 100

$\angle CMB = \angle DMB = 90^\circ$. Отже, наше припущення неправильне.

Аналогічно розглядають випадок, коли промінь MC належить куту DMB . ▲

Ви вмієте через довільну точку M , яка не належить прямій a , проводити пряму b , перпендикулярну до прямої a (рис. 100). Те, що така пряма b є єдиною, доведемо в п. 7.



1. Які дві прямі називають перпендикулярними?
2. Яким символом позначають перпендикулярні прямі?
3. Що називають кутом між двома прямими, які перетинаються?
4. Які два відрізки називають перпендикулярними?
5. Що називають відстанню від точки до прямої?
6. Скільки через кожну точку прямої можна провести прямих, перпендикулярних до даної?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

114.° Перерисуйте в зошит рисунок 101. Користуючись косинцем, проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої a .

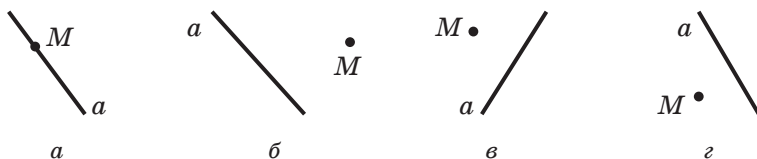
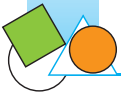
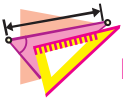


Рис. 101

115.° Проведіть пряму c і позначте на ній точку K . Користуючись косинцем, проведіть через точку K пряму, перпендикулярну до прямої c .



- 116.° Проведіть пряму d і позначте точку M , яка їй не належить. За допомогою косинця проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої d .
- 117.° Накресліть кут ABK , який дорівнює: 1) 73° ; 2) 146° . Позначте на промені BK точку C і проведіть через неї прямі, перпендикулярні до прямих AB і BK .
- 118.° Накресліть два перпендикулярних відрізки так, щоб вони: 1) перетиналися та не мали спільного кінця; 2) не мали спільних точок; 3) мали спільний кінець.
- 119.° Накресліть два перпендикулярних промені так, щоб вони: 1) перетиналися; 2) не мали спільних точок.



ВПРАВИ

- 120.° На рисунку 102 прямі AC і DK перпендикулярні. Чи перпендикулярні:
- 1) відрізки AB і BK ;
 - 2) відрізки BC і DF ;
 - 3) промені BC і BK ;
 - 4) відрізок AB і промінь FD ?
- 121.° Чи може кут між прямими дорівнювати: 1) 1° ; 2) 80° ; 3) 90° ; 4) 92° ; 5) 101° ?
- 122.° Доведіть, що коли бісектриси кутів AOB і BOC перпендикулярні, то точки A , O і C лежать на одній прямій.
- 123.° На рисунку 103 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42^\circ$, $\angle MOC + \angle BOK = 130^\circ$. Знайдіть: 1) кут $МОК$; 2) кут $МОD$.
- 124.° На рисунку 104 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54^\circ$. Знайдіть кут ABF .

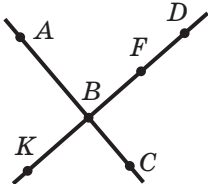


Рис. 102

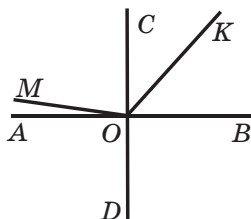


Рис. 103

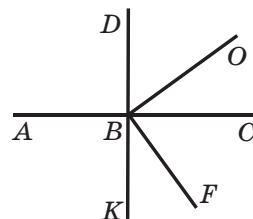


Рис. 104

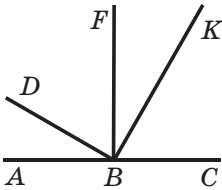


Рис. 105

- 125.°** Кут ABC дорівнює 160° , промені BK і BM проходять між сторонами цього кута й перпендикулярні до них. Знайдіть кут MBK .
- 126.°** На рисунку 105 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle FBK$.
- 127.°** На рисунку 105 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Доведіть, що $BF \perp AC$.
- 128.**** Із вершини кута ABC , який дорівнює 70° , проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF . Знайдіть кути DBF і ABF .
- 129.*** Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 17° , побудуйте кут, який дорівнює: 1) 5° ; 2) 12° .
- 130.*** Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 20° , побудуйте кут, який дорівнює 10° .



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

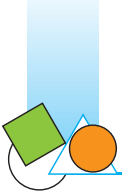
- 131.** На рисунку 106 пряма перетинає всі сторони восьмикутника. Чи може пряма перетинати всі сторони тринадцятикутника, не проходячи через жодну з його вершин?



Рис. 106

6. Аксіоми

У попередніх пунктах було доведено чотири теореми. Щоразу, доводячи нову властивість фігури, ми спиралися на раніше відомі геометричні факти. Наприклад, під час доведення теореми про вертикальні кути була використана властивість суміжних кутів. Керуючись цим принципом, ми доведемо ще багато нових теорем. Проте вже зараз, на початковому етапі вивчення геометрії, виникає природне запитання: якщо властивості геометричних фігур вивчають за принципом



«нове зі старого», то повинні існувати найперші, початкові факти, і тоді на чому базується обґрунтування їхньої справжності? Адже до них ніяких істинних тверджень не було. Розв'язати цю проблему можна в єдиний спосіб: прийняти перші властивості без доведення. Так і роблять математики. Ці властивості називають **аксіомами**.

За аксіоми вибирають твердження, які є простими, очевидними та не викликають сумнівів. Адже не дарма слово «аксіома», що походить від грецького «аксіос», означає «гідне визнання».

Деякі аксіоми були сформульовані в попередніх пунктах. Вони називалися **основними властивостями**.

Частину аксіом ми не виділяли якимось спеціальним чином, а просто формулювали як наочно очевидні твердження. Зокрема, у пп. 2, 3 було сформульовано аксіоми:

для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями;

кожний відрізок має певну довжину;

кожний кут має певну величину.

Ми спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто за суттю на аксіоми, але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 1, описуючи рисунок 13, ми фактично використали таку аксіому:

якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.

Аксиоми використовують не тільки в математиці. Нерідко в повсякденному житті будь-яке істинне твердження, що не потребує обґрунтування, називають аксіомою. Наприклад, говорять: «Після березня настане квітень. Це аксіома».

Аксиоми виникають не лише на основі практики або спостережень.

Для будь-якого громадянина України Конституція — це перелік аксіом. Тому аксіому можна розглядати як закон або правило. Проте закони (правила гри) приймають, тобто вони виникають у результаті домовленості людей між собою.



Отже, аксіоми геометрії можна також розглядати як за-тверджені правила, на підставі яких геометри, як муляри, зводять будівлю науки (рис. 107).

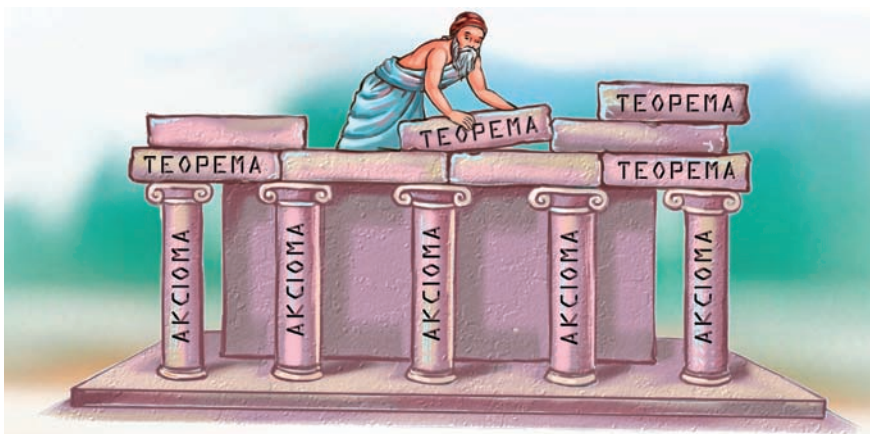


Рис. 107

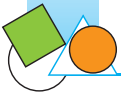
Тоді у вас може виникнути запитання: «Невже геометрію можна сприймати як гру, наприклад таку, як шахи?» Певною мірою — так. Проте при цьому слід розуміти, що шахові правила, а отже, і сама гра виникли завдяки людській фантазії. Разом з тим геометричні правила (аксіоми) виникли з практики та спостережень. Тому геометрія, на відміну від шахів, застосовується дуже широко.

Якщо ви оберете фах математика, то зможете ознайомитися із зовсім іншими геометріями, які відрізняються від тієї, яку ви вивчаєте в школі, тим, що вони побудовані на інших аксіомах.



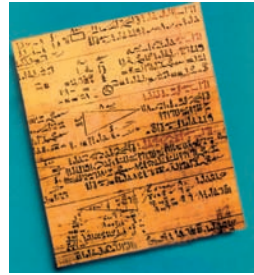
З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Коли й де виникли перші геометричні відомості? Фахівці не відповідають на це запитання однозначно. Деякі вважають, що першовідкривачами були єгипетські та вавилонські



землеміри, які жили за 4000 рр. до н. е., інші припускають, що геометрія зародилася в Стародавньому Єгипті 5000 років тому.

Може здатися дивним, але питання, коли виникла **наука геометрія**, не викликає суперечок. Історики зійшлися на думці: у VI ст. до н. е. Така одностайність, на перший погляд, уражає, адже й до тих часів народи стародавнього світу накопичили величезний обсяг геометричних знань. Напри-



Стародавній папірус

клад, цілком очевидно, що без геометричного досвіду єгиптяни не подарували б світові одне із «семи див світу» — піраміди. І все ж таки чому велика кількість накопичених геометричних фактів нерівносільна існуванню геометричної науки?



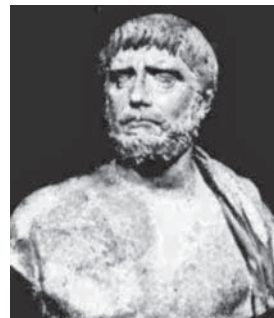
Єгипетські піраміди

Геометрія стала наукою лише тоді, коли її істини почали встановлювати шляхом доведення.

Поява «доказової геометрії» пов'язана з іменем першого із «семи мудреців» — Фалеса Мілетського¹ (близько 625–547 рр. до н. е.) — філософа, ученого, купця й державного діяча.

Задовго до Фалеса було відомо, що вертикальні кути рівні, що діаметр ділить круг на дві рівні частини. Ніхто в істинності цих фактів не сумнівався. А Фалес довів їх, тим самим прославивши себе.

У VI–III ст. до н. е. завдяки вченим Стародавньої Греції, таким як Піфагор, Евдокс, Архіт, Теетет, Евклід, Архімед, геометрія з прикладної науки перетворилася на математичну теорію.



Фалес Мілетський

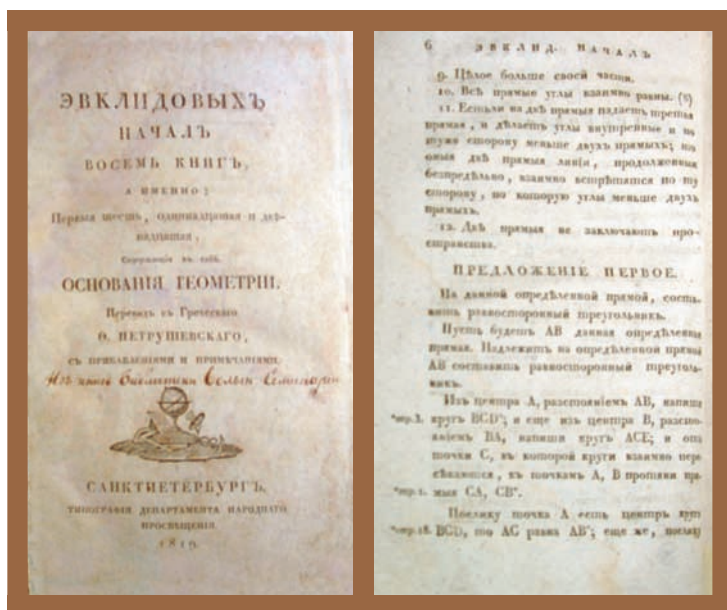
¹ Мілет — порт у Малій Азії на узбережжі Егейського моря.



Евклід

Книгу, за якою вивчали геометрію понад 2000 років, без перебільшення можна назвати визначною. Вона має назву «Начала», її автором є Евклід (близько 365–300 рр. до н. е.). На жаль, про самого Евкліда мало що відомо. У таких випадках постать обростає легендами, одна з яких дуже повчальна. Цар Птолемей I запитав Евкліда, чи існує більш простий шлях пізнання геометрії, ніж той, що викладений у «Началах». Евклід відповів: «У геометрії немає царських шляхів».

А який же шлях у геометрію обрав Евклід у своїх «Началах»? Аксиоматичний. У фундаменті науки — перелік найпростіших фактів. Їх називають постулатами (від латинського *postulatum* — «вимога») й аксіомами. Потім, базуючись на них, шляхом логічних міркувань доводять усі інші властивості — теореми.



«Начала» Евкліда



Постулатів у Евкліда п'ять. Наведемо перші чотири.

- I постулат.** Потрібно, щоб від кожної точки до будь-якої іншої точки можна було провести пряму лінію.
- II постулат.** І щоб кожну пряму можна було необмежено продовжити.
- III постулат.** І щоб з будь-якого центра можна було описати коло будь-якого радіуса.
- IV постулат.** І щоб усі прямі кути були рівні.

Про п'ятий постулат ми розкажемо після п. 14.

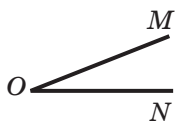
Протягом багатьох століть за популярністю з «Началами» Евкліда могла зрівнятися хіба що Біблія. Так, ще наприкінці XIX ст. у ряді європейських країн геометрію викладали за спрощеними виданнями «Начал».

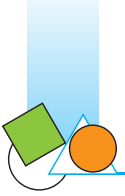
І зараз геометрія, яку вивчають у школі, багато в чому наслідує ідеї Евкліда.

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

- Скільки прямих визначають три точки, які не лежать на одній прямій?
А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.
- Скільки можна провести відрізків, які містять дві задані точки?
А) 1; Б) 2; В) 3; Г) безліч.
- Точка M є внутрішньою точкою відрізка PQ . Яке з поданих тверджень є правильним?
А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ = PM - MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.
- Точки A , B і C лежать на одній прямій, причому $BC = 8$ см, $AB - BC = 8$ см. Яке з поданих тверджень є правильним?
А) Точка A — середина відрізка BC ;
Б) точка B — середина відрізка AC ;
В) точка C — середина відрізка AB ;
Г) точки A і B збігаються.



5. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 14 см?
А) Безліч; Б) 1; В) 2; Г) жодної.
6. Довжина відрізка AB дорівнює 12 см. Скільки існує на прямій AB точок, сума відстаней від кожної з яких до кінців відрізка AB дорівнює 12 см?
А) Жодної; Б) 2; В) безліч; Г) 1.
7. Два промені є доповняльними, якщо:
А) вони мають спільний початок;
Б) їхнім об'єднанням є пряма й вони мають спільний початок;
В) вони належать одній прямій;
Г) їхнім об'єднанням є пряма.
8. Яке позначення кута, зображеного на рисунку, є неправильним?
А) $\angle O$; Б) $\angle MON$;
В) $\angle OMN$; Г) $\angle NOM$.
- 
9. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Суміжні кути мають спільну вершину;
Б) суміжні кути мають спільну сторону;
В) завжди один із суміжних кутів гострий, а другий — тупий;
Г) якщо кути AOC і COB суміжні, то промені OA і OB доповняльні.
10. Яке з поданих тверджень є хибним?
А) Вертикальні кути рівні;
Б) якщо кути рівні, то вони вертикальні;
В) вертикальні кути мають спільну вершину;
Г) сторони вертикальних кутів утворюють дві пари доповняльних променів.
11. Яке з поданих тверджень є правильним?
А) Перпендикулярні відрізки завжди мають спільну точку;
Б) перпендикулярні промені завжди мають спільну точку;
В) перпендикулярні прямі завжди мають спільну точку;
Г) перпендикулярні промінь і відрізок завжди мають спільну точку.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Основна властивість прямої

Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Прямі, що перетинаються

Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.

Теорема про дві прямі, що перетинаються

Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

Рівні відрізки

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.

Основна властивість довжини відрізка

Якщо точка C є внутрішньою точкою відрізка AB , то відрізок AB дорівнює сумі відрізків AC і CB , тобто $AB = AC + CB$.

Відстань між точками

Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB .

Доповняльні промені

Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.

Розгорнутий кут

Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.

Рівні кути

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.

**Бісектриса кута**

Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

Гострий, прямий, тупий кути

Кут, градусна міра якого дорівнює 90° , називають прямим.

Кут, градусна міра якого менша від 90° , називають гострим.

Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° , називають тупим.

Основна властивість величини кута

Якщо промінь OC ділить кут AOB на два кути AOC і COB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Суміжні кути

Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.

Властивість суміжних кутів

Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Вертикальні кути

Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.

Властивість вертикальних кутів

Вертикальні кути рівні.

Перпендикулярні прямі

Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

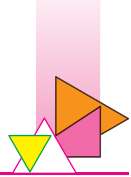
Теорема про пряму, перпендикулярну до даної

Через кожну точку прямої проходить лише одна пряма, перпендикулярна до даної.



Як, не накладаючи один трикутник на другий, дізнатися, чи є вони рівними? Які властивості притаманні рівнобедреному й рівносторонньому трикутникам? Яку «будову» має теорема? На ці й багато інших запитань ви знайдете відповіді в цьому параграфі.





7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника

Розглянемо три точки A , B , C , які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB , BC , CA . Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 108 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB , BC і CA називають **трикутником**. Точки A , B , C називають **вершинами трикутника**, а відрізки AB , BC , CA — **сторонами трикутника**.

Трикутник називають і позначають за його вершинами. Трикутник, зображений на рисунку 108, позначають так: $\triangle ABC$ (читають: «трикутник ABC »), або $\triangle BCA$ (читають: «трикутник BCA »), або $\triangle ACB$ і т. д.

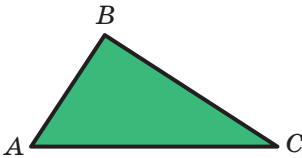


Рис. 108

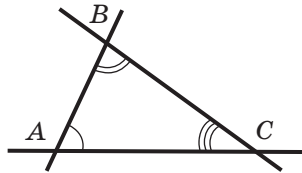


Рис. 109

Кути BAC , ABC , BCA (рис. 109) називають **кутами трикутника ABC** .

У трикутнику ABC (рис. 109), наприклад, кут B називають **кутом, протилежним стороні AC** , а кути A і C — **кутами, прилеглими до сторони AC** , сторону AC — **стороною, протилежною куту B** , сторони AB і AC — **сторонами, прилеглими до кута A** .

Означення. **Периметром трикутника** називають суму довжин усіх його сторін.

Периметр позначають буквою P . Наприклад, для периметра трикутника MNK використовують позначення P_{MNK} .

Означення. Трикутник називають **гострокутним**, якщо всі його кути гострі.

Трикутник називають **прямокутним**, якщо один із його кутів прямий.



Трикутник називають **тупокутним**, якщо один із його кутів тупий (рис. 110).

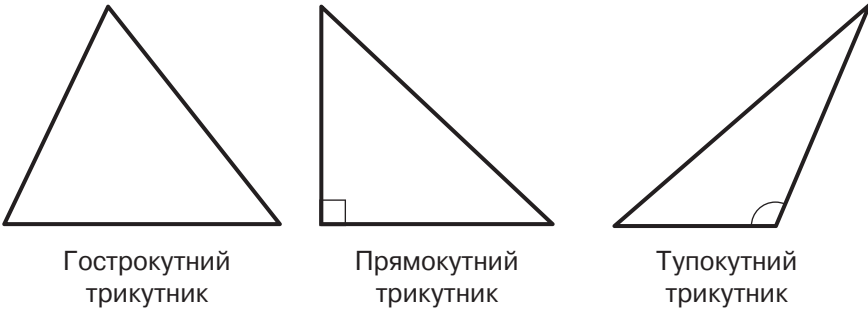


Рис. 110

Означення. Два трикутники називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 111 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають **відповідними сторонами** й **відповідними кутами**. Так, на рисунку 111 сторони AC і A_1C_1 , кути A та A_1 відповідні.

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок (рис. 111).

Зауважимо, що в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони, і навпаки, проти відповідних сторін лежать відповідні кути.

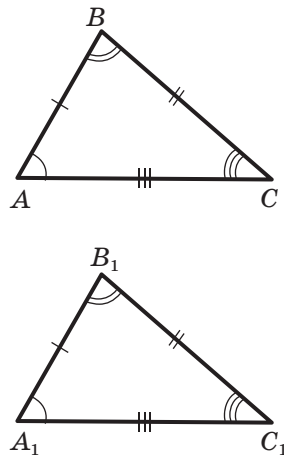
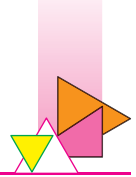


Рис. 111



Основна властивість рівності трикутників. Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC , такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M , а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M (рис. 112).

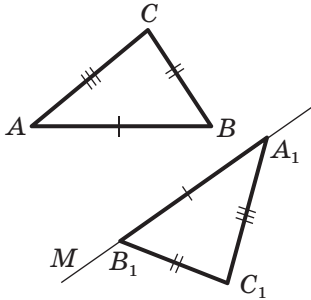


Рис. 112

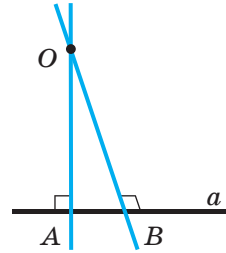


Рис. 113

Теорема 7.1. *Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.*

Доведення. ☺ Розглянемо пряму a і точку O , яка їй не належить. Припустимо, що через точку O проходять дві прямі OA та OB , перпендикулярні до прямої a (рис. 113).

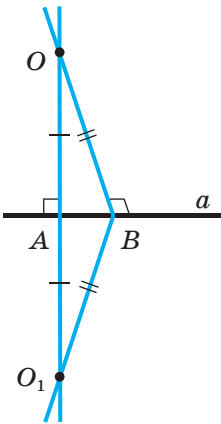


Рис. 114

За основною властивістю рівності трикутників існує трикутник O_1AB , який дорівнює трикутнику OAB , такий, що $AO = AO_1$ і $BO = BO_1$ (рис. 114). Тоді $\angle OAB = \angle O_1AB$. Отже, $\angle O_1AB = 90^\circ$. Звідси $\angle OAO_1 = 180^\circ$, а отже, точки O , A , O_1 лежать на одній прямій.

Аналогічно доводять, що точки O , B , O_1 також лежать на одній прямій. Але тоді прямі OA та OB мають дві точки перетину: O та O_1 . А це суперечить теоремі 1.1. Отже,



наше припущення неправильне. Таким чином, через точку O проходить одна пряма, перпендикулярна до прямої a . ▲

Можливо, ви помітили, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке означення рівних фігур.

Означення. Дві фігури називають **рівними**, якщо їх можна сумістити накладанням.

На рисунку 115 зображено рівні фігури Φ_1 і Φ_2 . Пишуть: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Зрозуміло, що будь-які дві прямі (два промені, дві точки) рівні.

Означення. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають **висотою трикутника**.

На рисунку 116 відрізки BB_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC .

Означення. Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають **медіаною трикутника**.

На рисунку 117 відрізок AM — медіана трикутника ABC .

Означення. Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають **бісектрисою трикутника**.

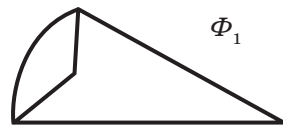


Рис. 115

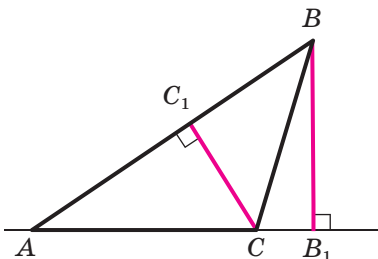


Рис. 116

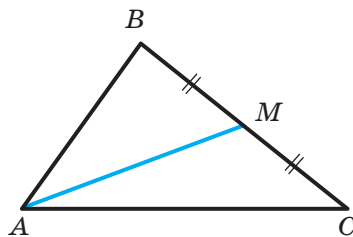


Рис. 117

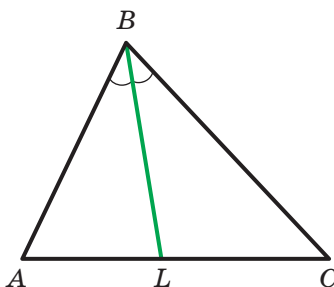
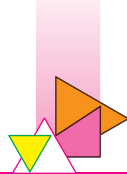


Рис. 118

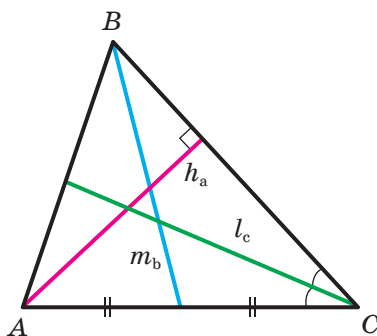


Рис. 119

На рисунку 118 відрізок BL — бісектриса трикутника ABC .

Кожний трикутник має три висоти, три медіани й три бісектриси.

Часто довжини сторін трикутника, протилежних кутам A, B, C , позначають відповідно a, b, c . Довжини висот позначають h_a, h_b, h_c , медіан — m_a, m_b, m_c , бісектрис — l_a, l_b, l_c . Індекс показує, до якої сторони проведено відрізок (рис. 119).



1. Як називають і позначають трикутник?
2. Що називають периметром трикутника?
3. Які існують види трикутників залежно від виду їхніх кутів?
4. Який трикутник називають прямокутним? тупокутним? гострокутним?
5. Які два трикутники називають рівними?
6. Як називають ті пари сторін і пари кутів рівних трикутників, які суміщаються при накладанні?
7. Які дві фігури називають рівними?
8. Що називають висотою трикутника?
9. Що називають медіаною трикутника?
10. Що називають бісектрисою трикутника?
11. Скільки кожний трикутник має висот? медіан? бісектрис?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

132.° Накресліть трикутник:

- 1) гострокутний;
- 2) прямокутний;
- 3) тупокутний.

Проведіть із кожної вершини трикутника висоту.

133.° Перерисуйте в зошит рисунок 120, проведіть висоту, спільну для всіх трьох зображених трикутників. У якого з них ця висота розміщена поза трикутником?

134.° Перерисуйте в зошит трикутники, зображені на рисунку 121, проведіть у кожному з них усі висоти.

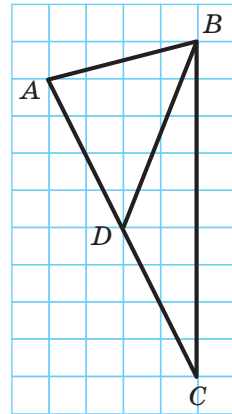


Рис. 120

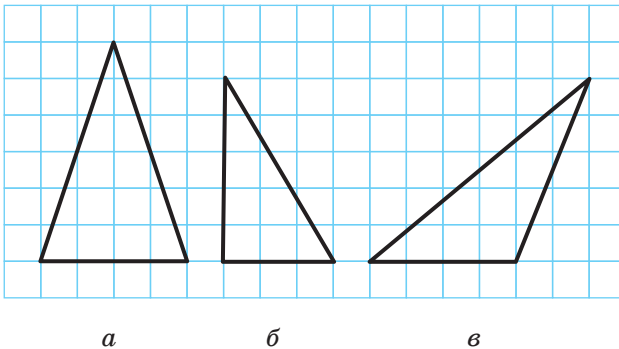
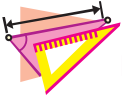


Рис. 121

135.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його медіани.

136.° Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси.



ВПРАВИ

- 137.° Накресліть довільний трикутник, позначте його вершини буквами M , K і E . Укажіть:
- 1) сторону, протилежну куту M ;
 - 2) кут, протилежний стороні MK ;
 - 3) сторони, прилеглі до кута K ;
 - 4) кути, прилеглі до сторони KE .
- 138.° Запишіть сторони, вершини, кути трикутника CEF (рис. 122). Укажіть:
- 1) кут, протилежний стороні CF ;
 - 2) кути, прилеглі до сторони CE ;
 - 3) сторону, протилежну куту E ;
 - 4) сторони, прилеглі до кута F .
- 139.° Одна зі сторін трикутника в 5 разів менша від другої та на 25 см менша від третьої. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 74 см.
- 140.° Сторони трикутника відносяться як $5 : 7 : 11$, а сума найбільшої і найменшої сторін дорівнює 80 см. Обчисліть периметр трикутника.
- 141.° Периметр трикутника дорівнює 48 см, а його сторони відносяться як $7 : 9 : 8$. Знайдіть сторони трикутника.
- 142.° Трикутники APK і MCE рівні, кути A і C відповідні, $PK = 10$ см. Знайдіть сторону ME .
- 143.° Трикутники ABC і DEF рівні, сторони AB і DE , BC і DF відповідні, $\angle B = 32^\circ$. Знайдіть кут D .
- 144.° Трикутники ABC і KTM рівні, кути A і M , B і K відповідні, $\angle C = 40^\circ$, $MK = 5$ см. Знайдіть кут T і сторону AB .
- 145.° Чи є правильним твердження:
- 1) якщо трикутники рівні, то їхні периметри теж рівні;
 - 2) якщо периметри двох трикутників рівні, то й самі трикутники рівні?

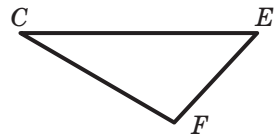


Рис. 122



- 146.° Які з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — завжди належать трикутнику?
- 147.° Який з елементів трикутника — бісектриса, медіана, висота — може збігатися з його стороною? Укажіть вид трикутника, для якого це можливо.
- 148.° 1) Чи може одна висота трикутника належати йому, а дві інші — ні?
2) Чи може тільки одна висота трикутника збігатися з його стороною?
3) У якому трикутнику три висоти перетинаються в його вершині?
- 149.° Медіана BD трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 32 см і 36 см. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $BD = 10$ см.
- 150.° Медіана трикутника, периметр якого дорівнює 60 см, розбиває його на два трикутники, периметри яких дорівнюють 36 см і 50 см. Чому дорівнює довжина цієї медіани?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

151. На рисунку 123 $KP = PE = EF = FT = 1$ см. Які рівні відрізки є ще на цьому рисунку? Знайдіть їхні довжини.

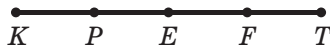
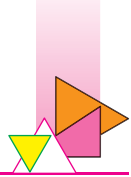


Рис. 123

152. Промінь BD розбиває кут ABC , який дорівнює 72° , на два кути ABD і CBD так, що $\angle ABD = 5 \angle CBD$. Промінь BK проходить так, що промінь BA є бісектрисою кута DBK . Визначте градусну міру та вид кута DBK .



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

153. Розріжте кожен з фігур, зображених на рисунку 124, на дві рівні фігури (розрізати не обов'язково вздовж ліній сітки).

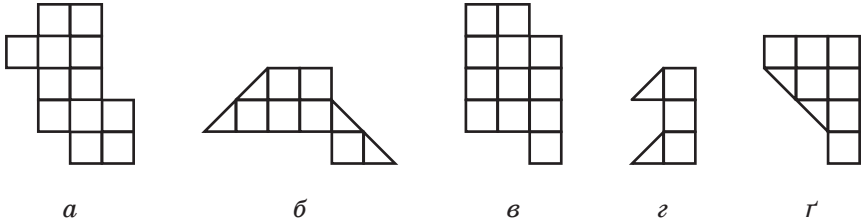


Рис. 124

8. Перша та друга ознаки рівності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються шість умов: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, що ці трикутники сумістяться при накладанні. Отже, вони рівні.

Спробуємо зменшити кількість умов. Наприклад, залишимо лише дві рівності: $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$. У цьому разі трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ можуть виявитися нерівними (рис. 125).

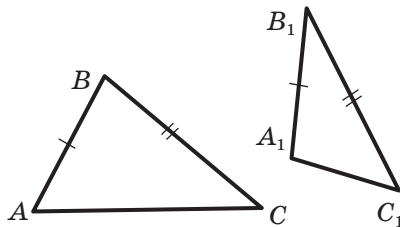
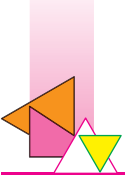


Рис. 125

Як же скоротити список вимог до мінімуму, зберігаючи при цьому рівність трикутників? На це запитання



відповідають теоремам, які називають **ознаками рівності трикутників**.

Теорема 8.1 (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). *Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 126). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб промінь BA сумістився з променем B_1A_1 , а промінь BC сумістився з променем B_1C_1 . Це можна зробити, тому що за умовою $\angle B = \angle B_1$. Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1 , а сторона BC — зі стороною B_1C_1 . Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні. ▲

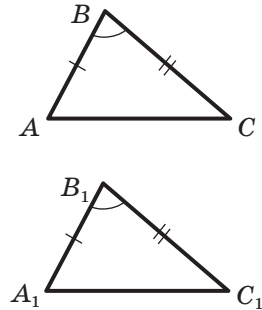


Рис. 126

Означення. Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають **серединним перпендикуляром** відрізка.

На рисунку 127 пряма a є серединним перпендикуляром відрізка AB . Зауважимо, що точки A і B рівновіддалені від прямої a .

Теорема 8.2. *Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.*

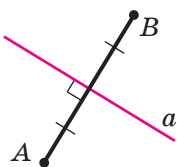


Рис. 127

Доведення. ☉ Нехай X — довільна точка серединного перпендикуляра a відрізка AB . Треба довести, що $XA = XB$.

Нехай точка M — середина відрізка AB . Якщо точка X збігається з точкою M (а це можливо, оскільки X — довільна точка прямої a), то $XA = XB$.

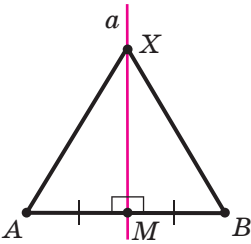


Рис. 128

Якщо точки X і M не збігаються, то розглянемо трикутники AXM і BXM (рис. 128). У цих трикутниках $AM = MB$, оскільки точка M — середина відрізка AB , сторона XM — спільна, $\angle AMX = \angle BMX = 90^\circ$. Отже, трикутники AXM і BXM рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді відрізки XA і XB рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ▲

Теорема 8.3 (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). Якщо сторона та два прилеглих до неї кутів одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. ☺ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 129). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб точка A сумістилася з точкою A_1 , відрізок AC — з відрізком A_1C_1 (це можливо, тому що $AC = A_1C_1$) і точки B і B_1 лежали в одній півплощині відносно прямої A_1C_1 . Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то промінь AB суміститься з променем A_1B_1 , а промінь CB — із променем C_1B_1 . Тоді точка B — спільна точка променів AB і CB — суміститься з точкою B_1 — спільною точкою променів A_1B_1 і C_1B_1 . Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні. ▲

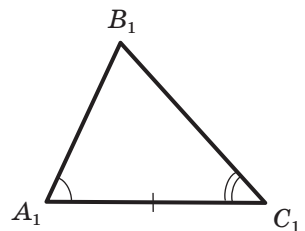
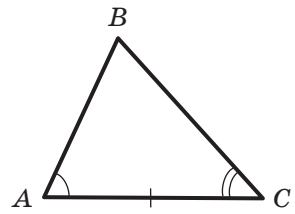


Рис. 129



Задача. На рисунку 130 точка O — середина відрізка BD , $\angle ABO = \angle CDO$. Доведіть, що $BC = AD$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOB і COD . Оскільки точка O — середина відрізка BD , то $BO = OD$. За умовою $\angle ABO = \angle CDO$. Куты AOB і COD рівні як вертикальні. Отже, $\triangle AOB = \triangle COD$ за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ як відповідні сторони рівних трикутників. Зауважимо, що BD — спільна сторона трикутників ABD і CDB . Також за умовою $\angle ABD = \angle CDB$. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. Тоді $BC = AD$. ●

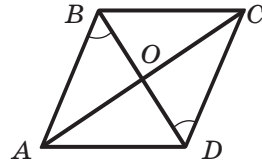


Рис. 130



1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Яку пряму називають серединним перпендикуляром відрізка?
3. Яку властивість мають точки серединного перпендикуляра відрізка?
4. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 154.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 6 см, а кут між ними — 40° .
- 155.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см, а кут між ними — 90° . Укажіть вид цього трикутника.
- 156.° За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 3 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 100° і 20° . Укажіть вид цього трикутника.



- 157.°** За допомогою лінійки та транспортира побудуйте трикутник, одна сторона якого дорівнює 6 см, а кути, що прилягають до цієї сторони, — 90° і 45° .
- 158.°** Перерисуйте в зошит рисунок 131. За допомогою косинця та лінійки знайдіть на прямій l точку, рівновіддалену від кінців відрізка AB .

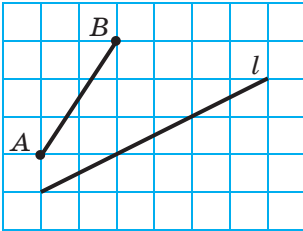


Рис. 131

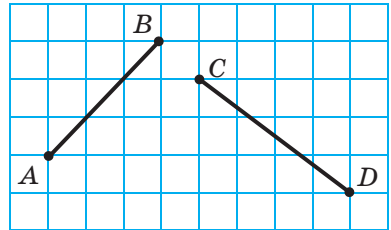
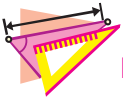


Рис. 132

- 159.°** Перерисуйте в зошит рисунок 132. За допомогою косинця та лінійки знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A і B та водночас рівновіддалена від точок C і D .



ВПРАВИ

- 160.°** На рисунку 133 $AC = DC$, $BC = EC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEC$.
- 161.°** На рисунку 134 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.

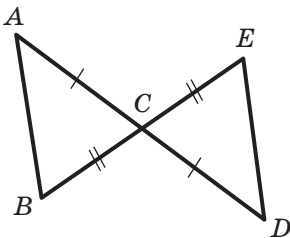


Рис. 133

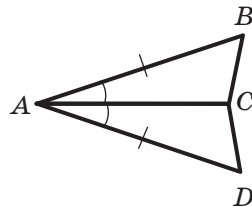


Рис. 134



162.° На рисунку 135 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34^\circ$. Знайдіть відрізок BC і кут A .

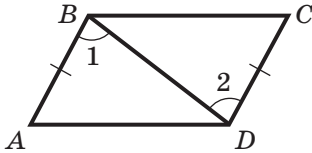


Рис. 135

163.° На рисунку 136 $AO = OD$, $BO = OC$. Знайдіть сторону CD і кут OCD трикутника OCD , якщо $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43^\circ$.

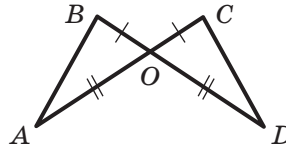


Рис. 136

164.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 137). Доведіть, що $\angle OAD = \angle OCB$.

165.° Дано: $\angle ADC = \angle ADB$, $BD = CD$ (рис. 138). Доведіть, що $AB = AC$.

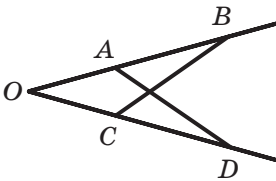


Рис. 137

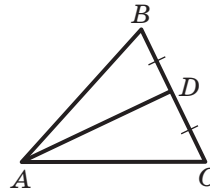
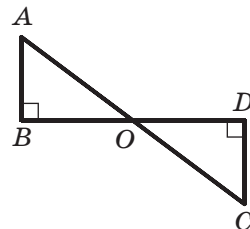


Рис. 138

166.° Із точок A і B , які лежать в одній півплощині відносно прямої a на однаковій відстані від неї, опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD . Знайдіть кут ACB , якщо $\angle ADC = 25^\circ$.

167.° Відрізки AD і BC перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Знайдіть кут ACD , якщо $\angle ABC = 64^\circ$, $\angle ACO = 56^\circ$.



168.° На рисунку 139 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, точка O — середина відрізка BD . Доведіть, що $\triangle ABO = \triangle CDO$.

Рис. 139



169.° На рисунку 140 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Знайдіть сторони AD і CD трикутника ADC .

170.° На рисунку 141 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Доведіть, що $\triangle BCO = \triangle EFO$.

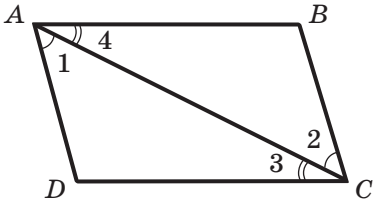


Рис. 140

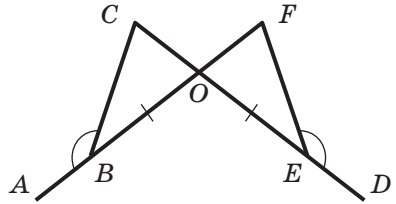


Рис. 141

171.° На рисунку 142 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$.

172.° На сторонах кута з вершиною в точці B позначено точки A і C , а на його бісектрисі — точку D таку, що $\angle ADB = \angle CDB$. Доведіть, що $AB = BC$.

173.° Через точку M , що належить бісектрисі кута з вершиною в точці O , проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси. Ця пряма перетинає сторони даного кута в точках A і B . Доведіть, що $AM = MB$.

174.° На рисунку 143 $\triangle ABC = \triangle ADC$. Доведіть, що $\triangle ABK = \triangle ADK$.

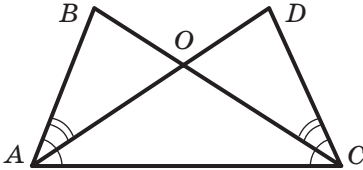


Рис. 142

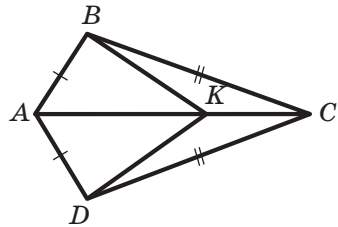


Рис. 143

175.° На рисунку 144 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle DBC = \triangle D_1B_1C_1$.

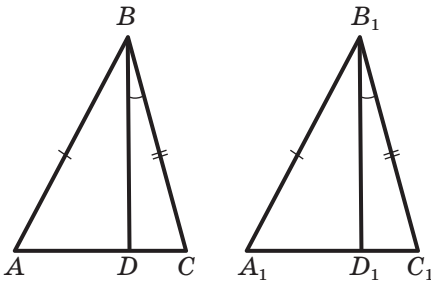


Рис. 144

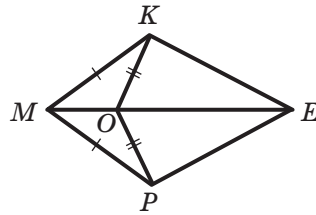


Рис. 145

- 176.** На рисунку 145 $\triangle MKO = \triangle MPO$. Доведіть, що $\triangle KOE = \triangle POE$.
- 177.** На рисунку 146 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle CDA$.
- 178.** Доведіть, що бісектриси рівних трикутників, проведені з вершин відповідних кутів, рівні.
- 179.** Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.
- 180.** На продовженні медіани AM трикутника ABC за точку M відкладено відрізок MK , який дорівнює AM . Знайдіть відстань від точки K до вершини C , якщо $AB = 6$ см.
- 181.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться точкою перетину навпіл. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle BAD$.

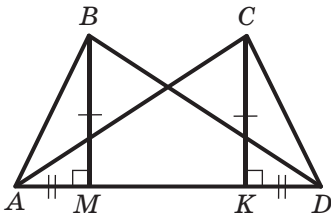


Рис. 146

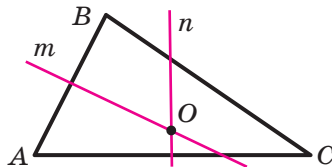


Рис. 147

- 182.** На рисунку 147 прями m і n — серединні перпендикуляри сторін AB і AC трикутника ABC . Доведіть, що точка O рівновіддалена від усіх вершин даного трикутника.



- 183.** Для знаходження відстані від точки B до дзвіниці A , яка розташована на другому березі річки (рис. 148), за допомогою віх, рулетки й астролябії позначили на місцевості точки C , D і E так, що B , C і D лежать на одній прямій, причому точка C є серединою відрізка BD . Потім намітили пряму AE , яка проходить через точку C , причому $\angle ABC = \angle CDE$. Далі, вимірявши одну зі сторін трикутника CDE , визначили відстань від B до A . Яку сторону виміряли? Відповідь обґрунтуйте.

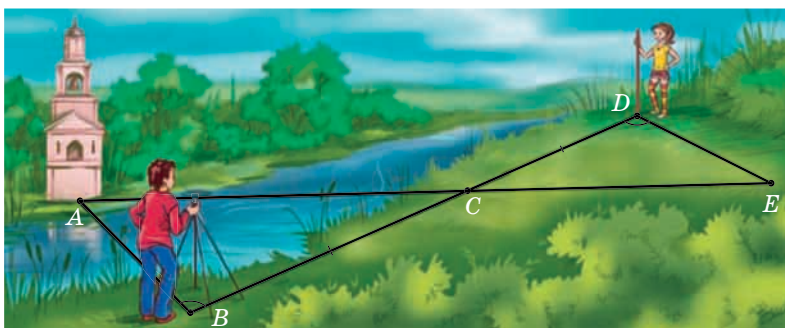


Рис. 148

- 184.** Для визначення ширини озера (рис. 149) на його березі позначили точки A і B , а потім ще точки C , D і O так, щоб точка O була спільною серединою відрізків AC і BD . Як можна визначити ширину озера? Відповідь обґрунтуйте.

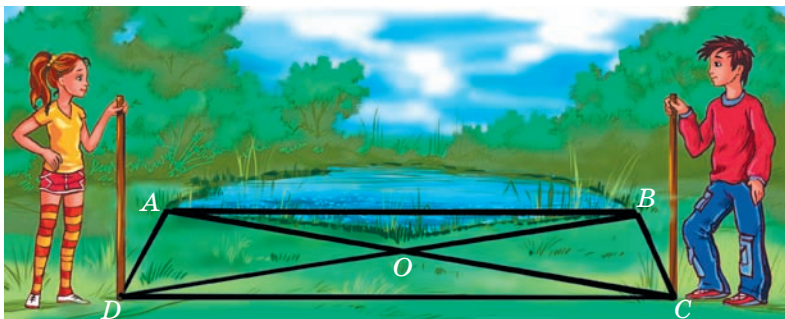
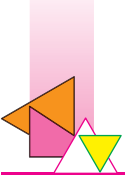


Рис. 149



- 185.** Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між цією стороною та медіаною.
- 186.** Доведіть рівність двох трикутників за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.
- 187.** Доведіть рівність двох трикутників за бісектрисою, кутом, з вершини якого проведено цю бісектрису, і кутом, що утворює бісектриса зі стороною, до якої її проведено.
- 188.** Серединний перпендикуляр сторони BC трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D . Знайдіть відрізок AD , якщо $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.
- 189.** Серединний перпендикуляр сторони AB трикутника ABC перетинає сторону BC у точці M . Знайдіть довжину сторони AC трикутника ABC , якщо $BC = 16$ см, а периметр трикутника AMC дорівнює 26 см.
- 190.** На рисунку 150 $OA = OD$. Додайте ще одну умову таку, щоб трикутники AOC і DOB виявилися рівними:
1) за першою ознакою рівності трикутників;
2) за другою ознакою рівності трикутників.
- 191.** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. На відрізку AC позначено точку M , а на відрізку BD — точку K так, що $AM = BK$. Доведіть, що: 1) $OM = OK$; 2) точки M , O і K лежать на одній прямій.
- 192.** На одній стороні кута з вершиною в точці O (рис. 151) позначено точки A і B , а на другій — точки C і D так, що $OA = OC$, $OB = OD$. Доведіть, що промінь OM є бісектрисою кута BOD , де M — точка перетину відрізків AD і BC .

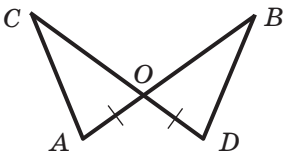


Рис. 150

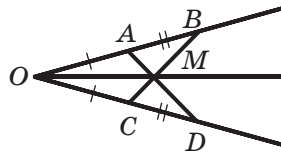
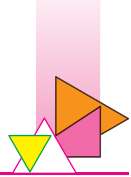


Рис. 151



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

193. Чи є правильним твердження: якщо через кожні дві з трьох даних точок провести пряму, то одержимо три прями?
194. Промені OD і OF — бісектриси суміжних кутів AOB і BOC відповідно, $\angle AOD : \angle FOC = 2 : 7$. Знайдіть кути AOD і FOC .



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

195. Розділіть кожну з фігур, що зображено на рисунку 152, уздовж ліній сітки на чотири рівні частини так, щоб у кожній частині було тільки одне коло.

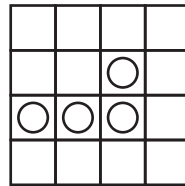
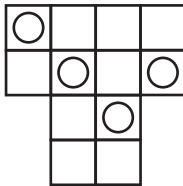


Рис. 152

9. Рівнобедрений трикутник та його властивості

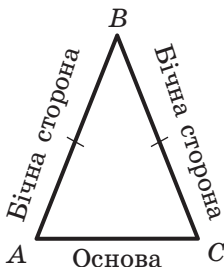


Рис. 153

Означення. Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають **рівнобедреним**.

На рисунку 153 зображено рівнобедрений трикутник ABC , у якого $AB = BC$.

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають **бічними сторонами**, а третю сторону — **основою** рівнобедреного трикутника.



Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін (точка B на рисунку 153). При цьому кут B називають **кутом при вершині**, а кути A і C — **кутами при основі** рівнобедреного трикутника.

Означення. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають **рівностороннім**.

На рисунку 154 зображено рівносторонній трикутник ABC . Рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника.

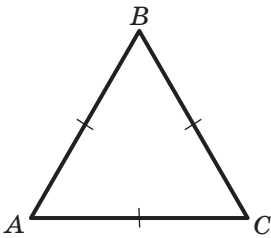


Рис. 154

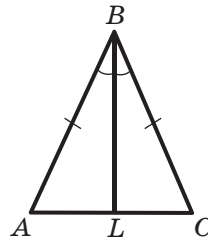


Рис. 155

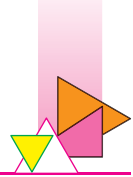
Теорема 9.1 (властивості рівнобедреного трикутника). У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.

Доведення. ☺ Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC , у якому $AB = BC$, відрізок BL — його бісектриса (рис. 155). Треба довести, що $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна, $\angle ABL = \angle CBL$, оскільки за умовою BL — бісектриса кута ABC , сторони AB і BC рівні як бічні сторони рівнобедреного трикутника. Отже, $\triangle ABL = \triangle CBL$ за першою ознакою рівності трикутників. Звідси можна зробити такі висновки: 1) $\angle A = \angle C$; 2) $AL = LC$; 3) $\angle ALB = \angle CLB$.

Оскільки відрізки AL і LC рівні, то відрізок BL — медіана трикутника ABC .

Кути ALB і CLB суміжні, отже, $\angle ALB + \angle CLB = 180^\circ$. Ураховуючи, що $\angle ALB = \angle CLB$, отримуємо: $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$. Отже, відрізок BL — висота трикутника ABC . ▲



Із теореми 9.1 випливає, що:

- 1) у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;
- 2) у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються;
- 3) у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні;
- 4) у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

Означення. Якщо в трикутнику довжини всіх сторін різні, то такий трикутник називають **різностороннім**.

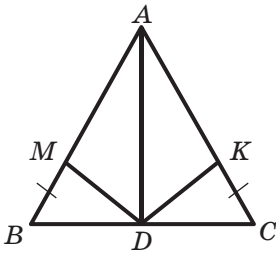


Рис. 156

Задача. Відрізок AD — медіана рівнобедреного трикутника ABC , яка проведена до основи. На сторонах AB і AC позначено відповідно точки M і K так, що $BM = CK$. Доведіть рівність трикутників AMD і AKD .

Розв'язання. Точка M належить відрізку AB , а точка K — відрізку AC , отже, $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 156).

Оскільки $AB = AC$ і $BM = CK$, то $AM = AK$.

Кути BAD і CAD рівні, оскільки медіана рівнобедреного трикутника, яка проведена до основи, є його бісектрисою.

Зауважимо, що AD — спільна сторона трикутників AMD і AKD .

Отже, трикутники AMD і AKD рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників. ●



1. Які існують види трикутників залежно від кількості рівних сторін?
2. Який трикутник називають рівнобедреним? рівностороннім? різностороннім?
3. Які сторони рівнобедреного трикутника називають бічними?



4. Яку сторону рівнобедреного трикутника називають основою?
5. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси рівнобедреного трикутника, проведеної до основи.
7. Яку властивість мають кути трикутника, що лежать проти його рівних сторін?
8. Сформулюйте властивість кутів рівностороннього трикутника.
9. Яку властивість мають бісектриса, висота й медіана рівностороннього трикутника, проведені з однієї вершини?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

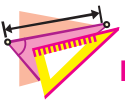
196.° Накресліть:

- 1) різносторонній гострокутний трикутник;
- 2) рівнобедрений прямокутний трикутник;
- 3) рівнобедрений тупокутний трикутник.

197.° Накресліть:

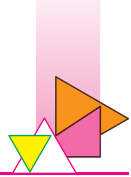
- 1) різносторонній прямокутний трикутник;
- 2) різносторонній тупокутний трикутник.

198.° Накресліть рівнобедрений трикутник з бічною стороною завдовжки 3 см так, щоб його кут при вершині був: 1) гострим; 2) прямим; 3) тупим. У побудованих трикутниках проведіть висоти до бічних сторін.



ВПРАВИ

- 199.°** 1) Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 13 см, а бічна сторона — 8 см.
2) Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а основа — 15 см. Знайдіть бічні сторони трикутника.



- 200.° Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 28 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть основу трикутника.
- 201.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 32 см, а основа на 5 см більша за бічну сторону.
- 202.° Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, периметр якого дорівнює 54 см, а основа в 4 рази менша від бічної сторони.
- 203.° У рівнобедреному трикутнику ABC сторона AC — основа, $\angle BCA = 40^\circ$, $\angle ABC = 100^\circ$, BD — медіана. Знайдіть кути трикутника ABD .
- 204.° На рисунку 157 $AB = BC$, BD — медіана трикутника ABC , $\angle ABD = 53^\circ$. Знайдіть кути ABC і ADE .
- 205.° На рисунку 158 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48^\circ$, $\angle POE = 90^\circ$. Знайдіть сторону ME і кут MKO .
- 206.° На рисунку 159 $AB = BC$, $\angle 1 = 140^\circ$. Знайдіть кут 2.

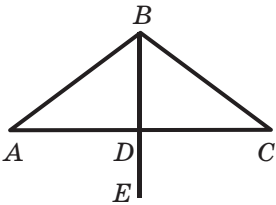


Рис. 157

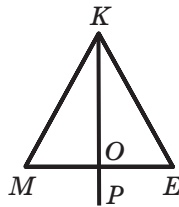


Рис. 158

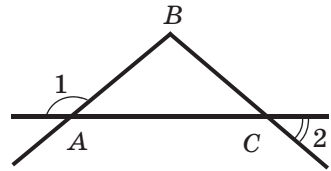


Рис. 159

- 207.° Кут, вертикальний до кута при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 68° . Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та медіаною, проведеною до основи.
- 208.° Кут, суміжний із кутом при вершині рівнобедреного трикутника, дорівнює 76° . Знайдіть кут між бічною стороною трикутника та висотою, опущеною на основу.
- 209.° На рисунку 160 $AB = BC$, $DC = DE$. Доведіть, що $\angle A = \angle E$.
- 210.° Пряма перетинає сторони кута A в точках B і C так, що $AB = AC$ (рис. 161). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

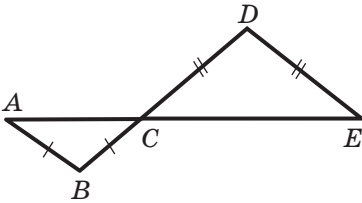


Рис. 160

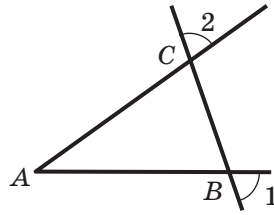


Рис. 161

- 211.°** На рисунку 162 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 212.°** Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC , BD — його бісектриса, DM — бісектриса трикутника BDC . Знайдіть кут ADM .
- 213.°** Один учень стверджує, що деякий трикутник рівнобедрений, а другий учень — що цей трикутник рівносторонній.
- 1) Чи можуть обидва учні бути правими?
 - 2) У якому випадку правий тільки один учень і який саме?
- 214.°** Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та кутом при вершині.
- 215.°** Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за основою та прилеглим до неї кутом.

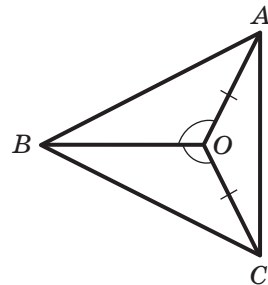
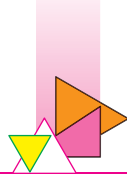


Рис. 162

- 216.°** На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначено точки M і K так, що точка M лежить між точками A і K , причому $AM = CK$. Доведіть, що трикутник MVK рівнобедрений.
- 217.°** У трикутнику MKE відомо, що $MK = ME$. На стороні KE позначено точки F і N так, що точка N лежить між точками F і E , причому $\angle KMF = \angle EMN$. Доведіть, що $\angle MFN = \angle MNF$.



- 218.** На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC відкладено відповідно рівні відрізки CK і CM . Доведіть, що: 1) $\triangle AMC = \triangle BKC$; 2) $\triangle AMB = \triangle BKA$.
- 219.** У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC на медіані BD позначили довільну точку M . Доведіть, що: 1) $\triangle AMB = \triangle CMB$; 2) $\triangle AMD = \triangle CMD$.
- 220.** Доведіть, що бісектриси рівнобедреного трикутника, проведені з вершин кутів при основі, рівні.
- 221.** Доведіть, що медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, рівні.
- 222.** Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника.
- 223.** Знайдіть третю сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші його сторони дорівнюють 7 см і 4 см. Скільки розв'язків має задача?
- 224.** Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 4 см. Знайдіть дві інші сторони, якщо периметр трикутника дорівнює 14 см.
- 225.** Чи є правильним твердження:
- бісектриса рівнобедреного трикутника є його висотою та медіаною;
 - бісектриса рівностороннього трикутника є його висотою та медіаною;
 - якщо периметр трикутника в 3 рази більший за одну з його сторін, то цей трикутник рівносторонній?

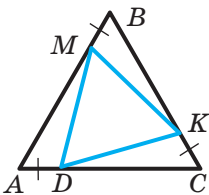


Рис. 163

226. На сторонах рівностороннього трикутника ABC (рис. 163) позначили точки M , K і D так, що $AD = BM = CK$. Доведіть, що трикутник MKD рівносторонній.

227. На продовженнях сторін AB , BC , AC рівностороннього трикутника ABC (рис. 164) за точки A , B і C відповідно відклали рівні відрізки AD , BK і CE . Доведіть, що трикутник DEK рівносторонній.

- 228.** Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана ділить даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший



від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

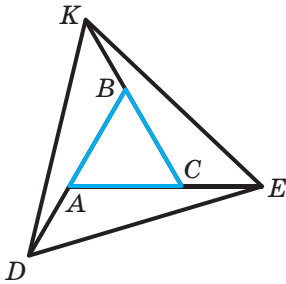


Рис. 164

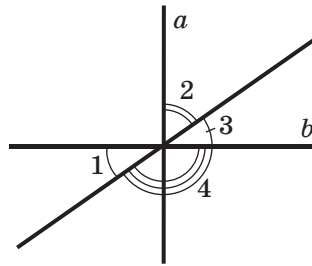


Рис. 165

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

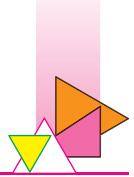
229. На рисунку 165 $a \perp b$, $\angle 1 = 35^\circ$. Знайдіть кути 2, 3, 4.
230. Точки C і D поділили відрізок AB , довжина якого дорівнює a , на три відрізки AC , CD і DB так, що $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Знайдіть відстань між: 1) точкою A та серединою відрізка CD ; 2) серединами відрізків AC і DB .

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

231. Нарисуйте шестикутник, який можна одним розрізом поділити на два трикутники.

10. Ознаки рівнобедреного трикутника

У попередньому пункті ми розглянули властивості рівнобедреного трикутника. А як серед трикутників «розпізнавати» рівнобедрені? На це запитання відповідають такі теореми-ознаки.



Теорема 10.1. *Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BM — медіана й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 166).

З умови теореми випливає, що пряма BM — серединний перпендикуляр відрізка AC .

Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $AB = BC$. ▲

Теорема 10.2 *Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BL — бісектриса й висота. Треба довести, що $AB = BC$ (рис. 167).

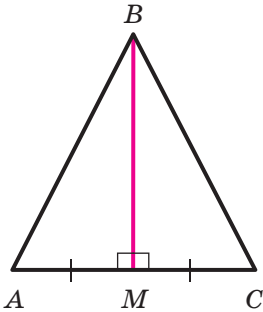


Рис. 166

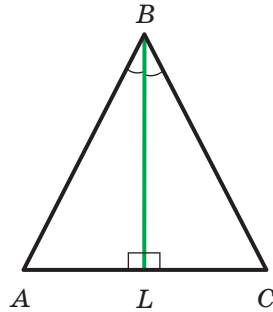


Рис. 167

У трикутниках ABL і CBL сторона BL — спільна; $\angle ABL = \angle CBL$ (оскільки за умовою BL — бісектриса кута ABC), $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$ (оскільки за умовою відрізок BL — висота). Отже, трикутники ABL і CBL рівні за другою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AB і BC рівні як відповідні сторони рівних трикутників. ▲

Теорема 10.3. *Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle A = \angle C$. Треба довести, що $AB = BC$.

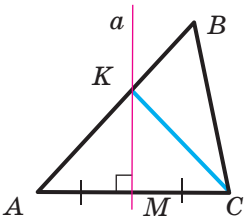


Рис. 168

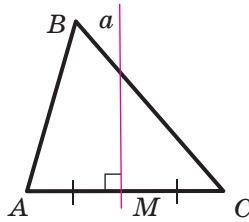


Рис. 169

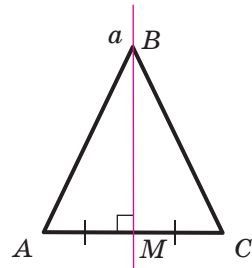


Рис. 170

Проведемо серединний перпендикуляр a сторони AC . Доведемо, що пряма a проходить через вершину B .

Припустимо, що це не так. Тоді пряма a перетинає у внутрішній точці або сторону AB (рис. 168), або сторону BC (рис. 169).

Розглянемо перший із цих випадків. Нехай K — точка перетину прямої a зі стороною AB . Тоді за властивістю серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Отже, трикутник AKC рівнобедрений, звідси $\angle A = \angle ACK$. Проте за умовою $\angle A = \angle ACB$. Тоді маємо: $\angle ACB = \angle ACK$, що суперечить основній властивості величини кута (п. 3).

Аналогічно отримуємо суперечність і для другого випадку (рис. 169).

Отже, наше припущення неправильне. Пряма a проходить через точку B (рис. 170). Тоді за властивістю серединного перпендикуляра $BA = BC$. ▲

Із цієї теореми випливає, що:

- 1) у трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони;
- 2) якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.

Теорема 10.4. Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC , у якому відрізок BM — медіана й бісектриса. Треба довести, що $AB = BC$.

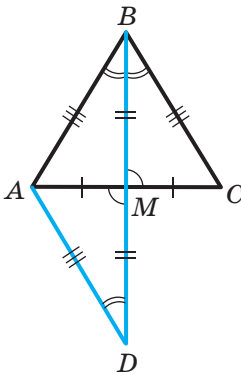


Рис. 171

На промені BM відкладемо відрізок MD , який дорівнює відрізку BM (рис. 171).

У трикутниках AMD і CMB маємо: $AM = MC$ (оскільки за умовою BM — медіана); $BM = MD$ за побудовою; кути AMD і CMB рівні як вертикальні. Отже, трикутники AMD і CMB рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тоді сторони AD і BC , кути ADM і CBM рівні як відповідні елементи рівних трикутників.

Оскільки BD — бісектриса кута ABC , то $\angle ABM = \angle CBM$. Оскільки $\angle CBM = \angle ADM$, то маємо: $\angle ABM = \angle ADM$. Тоді за ознакою рівнобедреного трикутника (теорема 10.3) отримуємо, що трикутник DAB рівнобедрений, звідки $AD = AB$. І вже доведено, що $AD = BC$. Отже, $AB = BC$. ▲

Задача. У трикутнику ABC проведено бісектрису BM (рис. 172), $\angle BAK = 70^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$. Доведіть, що $BM \perp AK$.

Розв'язання. Оскільки кути BKA і AKC суміжні, то $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKC$. Тоді $\angle BKA = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Отже, у трикутнику ABK отримуємо, що $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$. Тому трикутник ABK рівнобедрений з основою AK , і його бісектриса BO (O — точка перетину AK і BM) є також висотою, тобто $BM \perp AK$. ●

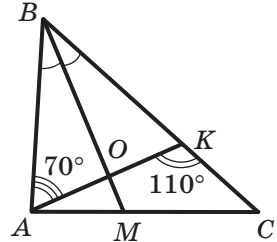
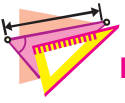


Рис. 172

1. Сформулюйте ознаки рівнобедреного трикутника.
2. Який зв'язок між рівними кутами та рівними сторонами трикутника?
3. Що можна сказати про трикутник, якщо всі його кути рівні?



ВПРАВИ

- 232.° У трикутнику ABC медіана BK перпендикулярна до сторони AC . Знайдіть кут ABC , якщо $\angle ABK = 25^\circ$.
- 233.° Серединний перпендикуляр сторони AC трикутника ABC проходить через вершину B . Знайдіть кут C , якщо $\angle A = 17^\circ$.
- 234.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$, CK — висота. Знайдіть сторону AB , якщо $CK = 7$ см.
- 235.° На рисунку 173 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 236.° Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A , перетинає його сторони в точках B і C . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 237.° Бісектриси AM і CK кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.
- 238.° У трикутнику ABC бісектриса BK є його висотою. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ABK дорівнює 16 см і $BK = 5$ см.
- 239.° Чи є правильним твердження:
- 1) якщо медіана й висота трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
 - 2) якщо бісектриса трикутника ділить протилежну сторону навпіл, то цей трикутник рівнобедрений?
- 240.° Медіани AE і CF , проведені до бічних сторін BC і AB рівнобедреного трикутника ABC , перетинаються в точці M . Доведіть, що трикутник AMC рівнобедрений.

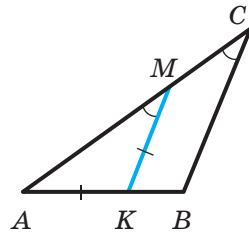
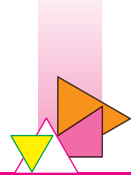


Рис. 173



- 241.*** Точки M і K належать відповідно бічним сторонам AB і BC рівнобедреного трикутника ABC , $AM = CK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.
- 242.**** На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $\angle EAC = \angle DCA$. Відрізки AE і CD перетинаються в точці F , $DF = EF$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 243.**** Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено пряму, перпендикулярну до бісектрис кутів ABC і BAC . Ці прямі перетинають сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що $AM = BK$.
- 244.**** Медіана AM трикутника ABC перпендикулярна до його бісектриси BK . Знайдіть сторону AB , якщо $BC = 16$ см.
- 245.**** Пряма, яка проходить через вершину A трикутника ABC перпендикулярно до його медіани BD , ділить цю медіану навпіл. Знайдіть відношення довжин сторін AB і AC трикутника ABC .
- 246.**** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 67,5^\circ$, $\angle B = 22,5^\circ$, CK — бісектриса трикутника ABC , CM — бісектриса трикутника BCK (рис. 174). Доведіть, що точка M — середина відрізка AB .

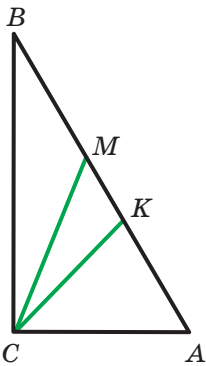


Рис. 174

247.* Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

248.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 3$ см, $AC = 6$ см. На стороні BC позначено точку M таку, що $CM = 1$ см. Пряма, яка проходить через точку M перпендикулярно до бісектриси кута ACB , перетинає відрізок AC у точці K ,



а пряма, яка проходить через точку K перпендикулярно до бісектриси кута BAC , перетинає пряму AB у точці D . Знайдіть відрізок BD .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

249. На прямій послідовно позначили точки A, B, C, D, E і F так, що $AB = BC = CD = DE = EF$. Знайдіть відношення $AB : CF, AB : BF, BD : AE$.
250. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо один із них на 42° більший за половину іншого кута.



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

251. Розріжте прямокутник розміром 4×9 на дві рівні частини, з яких можна скласти квадрат.

11. Третя ознака рівності трикутників

Теорема 11.1 (третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами). *Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.*

Доведення. ⊕ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 175), у яких $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1$ (ці рівності вказують, які сторони трикутників відповідають одна одній). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1 , вершина B — з вершиною B_1 ,

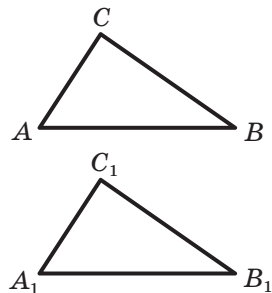


Рис. 175

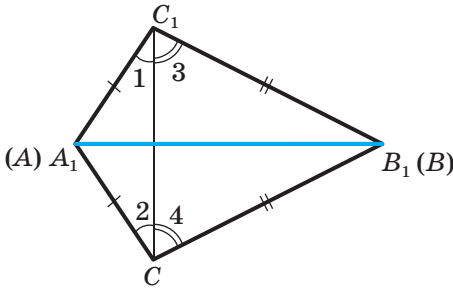
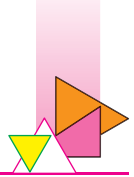


Рис. 176

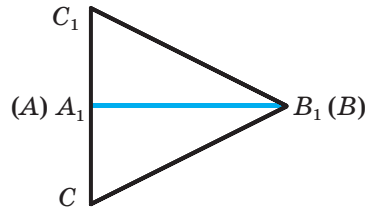


Рис. 177

а вершини C і C_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої AB (рис. 176). Проведемо відрізок CC_1 . Оскільки $AC = A_1C_1$, то трикутник C_1A_1C рівнобедрений, а отже, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогічно можна довести, що $\angle 3 = \angle 4$. Отже, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тоді трикутники $A_1C_1B_1$ і A_1CB_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

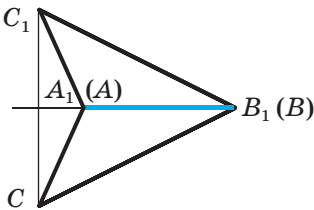


Рис. 178

Здавалося б, доведення завершено. Проте ми розглянули лише випадок, коли відрізок CC_1 перетинає відрізок A_1B_1 у внутрішній точці. Насправді відрізок CC_1 може проходити через один із кінців відрізка A_1B_1 , наприклад через точку A_1 (рис. 177), або не мати спільних точок з відрізком A_1B_1 (рис. 178). У кожному із цих випадків доведення будуть аналогічними наведеному. Проведіть їх самостійно. ▲

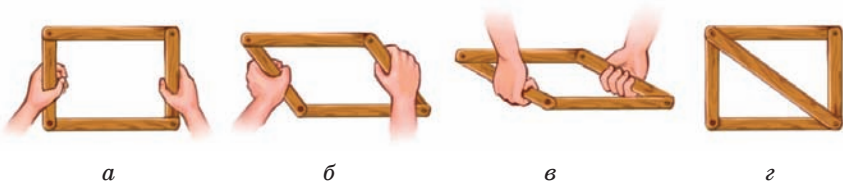


Рис. 179



Опори ліній електропередачі



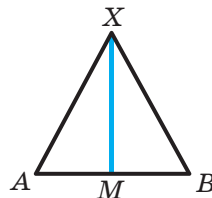
Телевізійна вежа (м. Київ)

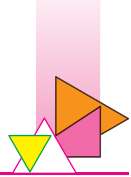
Рис. 180. Жорсткі конструкції

Із третьої ознаки рівності трикутників випливає, що *трикутник — жорстка фігура*. Справді, якщо чотири рейки з'єднати так, як показано на рисунку 179, *а*, то така конструкція не буде жорсткою (рис. 179, *б*, *в*). Якщо ж додати ще одну рейку, утворивши два трикутники (рис. 179, *г*), то одержана конструкція стане жорсткою. Цей факт широко використовують на практиці (рис. 180).

Теорема 11.2 *Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.*

Доведення. ☺ Нехай точка X рівновіддалена від кінців відрізка AB , тобто $XA = XB$ (рис. 181). Розглянемо трикутники AXM і BXM , де точка M — середина відрізка AB . Тоді $\triangle AXM = \triangle BXM$ за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AMX = \angle BMX$. Сума цих кутів дорівнює 180° , тому кожний із них дорівнює 90° . Отже, пряма XM — серединний перпендикуляр відрізка AB .

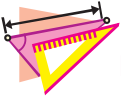
**Рис. 181**



Зауважимо, що ми розглянули випадок, коли точка X не належить прямій AB . Якщо точка X належить прямій AB , то вона збігається із серединою відрізка AB , а отже, належить його серединному перпендикуляру. ▲



1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
2. Де знаходяться точки, які рівновіддалені від кінців відрізка?



ВПРАВИ

- 252.°** На рисунку 182 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.
- 253.°** На рисунку 183 $AC = AD$, $BC = BD$. Знайдіть кут BAC , якщо $\angle BAD = 25^\circ$.
- 254.°** Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо бічна сторона та основа одного трикутника відповідно дорівнюють бічній стороні та основі другого трикутника.

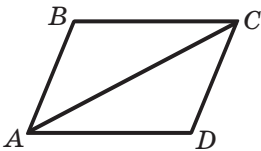


Рис. 182

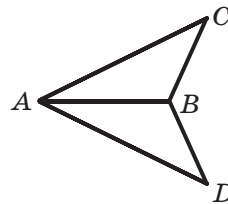


Рис. 183

- 255.°** Доведіть, що два рівносторонніх трикутники рівні, якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого трикутника.
- 256.°** На рисунку 184 $\triangle ABC = \triangle DCB$, причому $AB = CD$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle DCA$.

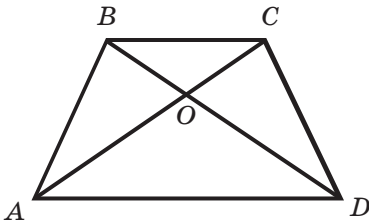


Рис. 184

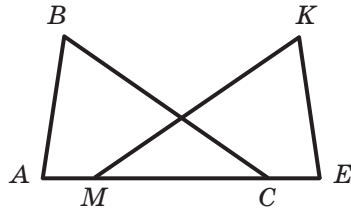


Рис. 185

- 257.°** На рисунку 184 $AB = CD$, $AC = BD$. Доведіть, що трикутник BOC рівнобедрений.
- 258.°** Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB . Доведіть, що пряма MN — серединний перпендикуляр відрізка AB .
- 259.°** На рисунку 185 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Доведіть, що $\angle AMK = \angle BCE$.
- 260.°** На рисунку 186 $AB = CD$, $BC = AD$, BM — бісектриса кута ABC , DK — бісектриса кута ADC . Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle CDK$.
- 261.°** Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OD$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.
- 262.°** Відрізки BD і B_1D_1 — бісектриси трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
- 263.**** Микола стверджує, що йому вдалося зробити рисунок, на якому $AB = AC$ і $AM = AN$ (рис. 187). Чи має Микола рацію?

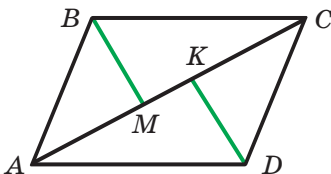


Рис. 186

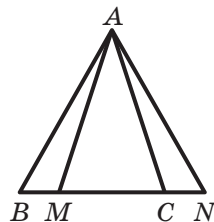
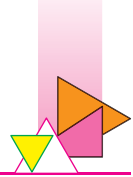


Рис. 187



- 264.** Чи можна стверджувати, що два трикутники є рівними, якщо кожній стороні одного трикутника дорівнює деяка сторона другого трикутника?
- 265.* Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами та медіаною, яка проведена до третьої сторони.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

266. На відрізку AB позначили точки C і D так, що $AC : BC = 7 : 8$, $AD : BD = 13 : 17$. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо відстань між точками C і D дорівнює 2 см.
267. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , промені OM і OK — бісектриси відповідно кутів AOC і BOC , які утворилися при цьому. Чи буде кут $МОК$ прямим?



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

268. Квадрат розрізали по діагоналях на чотири трикутники (рис. 188). Складіть із цих трикутників два квадрати.

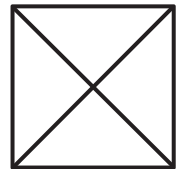


Рис. 188

12. Теорема

Ви бачите, що в підручнику з'являється все більше й більше теорем. І це не дивно: адже геометрія складається переважно з теорем та їхніх доведень.

Формулювання всіх теорем, які ми довели, складаються з двох частин. Першу частину теореми (те, що дано) називають **умовою** теореми, другу частину теореми (те, що потрібно довести) — **висновком** теореми.

Наприклад, у теоремі 8.1 (перша ознака рівності трикутників) умовою є те, що *дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника*, а висновком є *рівність трикутників*.



Усі відомі вам теореми можна умовно поділити на **теореми-властивості** й **теореми-ознаки**. Наприклад, теорема 1.1 установлює властивість прямих, що перетинаються, теорема 9.1 — властивість рівнобедреного трикутника.

Теореми-ознаки вказують на ознаки, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, у теоремах 10.1–10.4 сформульовано властивості, за якими розпізнають рівнобедрений трикутник.

Теореми, які впливають *безпосередньо* з аксіом або теорем, називають **теоремами-наслідками**, або просто **наслідками**.

Наприклад, властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми 9.1.

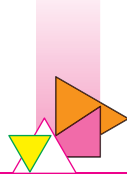
Якщо в теоремі 8.2 про властивість серединного перпендикуляра поміняти місцями умову й висновок, то отримаємо теорему 11.2. Дві теореми, кожна з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову й висновок, називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь із цих теорем назвати **прямою**, то другу теорему називатимемо **оберненою**.

Міняючи місцями умову й висновок теореми, треба бути дуже уважними: не завжди можна отримати істинне твердження. Наприклад, твердження, обернене до теореми 4.1 про суму суміжних кутів, хибне. Справді, якщо сума якихось двох кутів дорівнює 180° , то зовсім не обов'язково, щоб ці кути були суміжними.

Ви знаєте, що справедливості теореми встановлюють шляхом логічних міркувань, тобто доведенням.

Першу теорему цього підручника було доведено методом **від супротивного**. Назва цього методу фактично відображає його суть. Ми припустили, що висновок теореми 1.1 неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань ми отримали факт, який суперечить основній властивості прямої.

Методом від супротивного було доведено також і ряд інших теорем, наприклад теореми 5.1, 10.3.



Дуже важливо, щоб доведення теореми було повним, тобто були розглянуті всі можливі випадки. Так, повне доведення теореми 11.1 (третя ознака рівності трикутників) потребувало розгляду трьох можливих випадків.

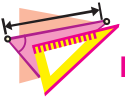
Уміння бачити всі тонкощі доведення — найважливіша якість, що формує математичну культуру. Якби, наприклад, під час доведення теореми 8.2 про властивість серединного перпендикуляра відрізка ми не розглянули окремо випадок, коли точка X є серединою відрізка AB , то для цього випадку звернення до трикутників $AХМ$ і $ВХМ$ було б неможливим.

Під час доведення теореми 10.4 (ознака рівнобедреного трикутника) ми використовували **прийом додаткової побудови**: рисунок доповнили елементами, про які не йшлося в умові теореми. Цей метод є ключем до розв'язування багатьох задач і доведення ряду теорем. Тому дуже важливо навчитися бачити «вигідну» додаткову побудову — таку, яка допоможе отримати потрібний результат.

А як набути такого «геометричного зору»? Запитання непросте, і на нього не відповіси, даючи конкретні рекомендації. Але все ж таки радимо: по-перше, не бути байдужим до геометрії, а полюбити цей красивий предмет; по-друге, розв'язувати більше задач, щоб розвинути інтуїцію та набути потрібного досвіду. Дерзайте!



1. З яких двох частин складається формулювання теореми?
2. Як називають теорему, у якій перелічено властивості, за якими можна віднести фігуру до певного виду (класу)?
3. Як називають теорему, яка безпосередньо впливає з аксіоми чи іншої теореми?
4. Як називають пару теорем, у яких умову й висновок поміняно місцями?
5. У чому полягає метод доведення від супротивного?
6. Які з теорем 1.1, 4.2, 5.1, 8.3 доведено методом від супротивного?
7. У чому полягає прийом додаткової побудови?

**ВПРАВИ**

269.° У теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажіть умову й висновок теореми.

270.° Із теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 виберіть: 1) теореми властивості; 2) теореми-ознаки.

271.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

- 1) якщо трикутник рівносторонній, то його кути рівні;
- 2) якщо два кути вертикальні, то їхні бісектриси є доповняльними променями;
- 3) якщо кут між бісектрисами двох кутів прямий, то ці кути суміжні;
- 4) якщо сторона та протилежний їй кут одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та протилежному їй куту другого трикутника, то ці трикутники рівні.

Для яких із даних тверджень:

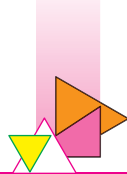
- 1) пряме й обернене твердження є правильними;
- 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
- 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?

272.° Сформулюйте твердження, яке є оберненим до даного:

- 1) якщо точка B лежить між точками A і C , то $AB + BC = AC$;
- 2) якщо два трикутники не рівні, то їхні периметри теж не рівні;
- 3) якщо градусна міра кута більша за 90° , то він є тупим.

Для яких із даних тверджень:

- 1) пряме й обернене твердження є правильними;
- 2) пряме твердження є правильним, а обернене — хибним;
- 3) пряме твердження є хибним, а обернене — правильним?



- 273.°** Сформулюйте твердження, що заперечує дане:
- 1) відрізок AB перетинає пряму m ;
 - 2) градусна міра кута ABC більша за 40° ;
 - 3) із двох суміжних кутів хоча б один не більший за 90° ;
 - 4) промені OA та OB не є доповняльними;
 - 5) відрізок має тільки одну середину.
- 274.°** Сформулюйте твердження, що заперечує дане:
- 1) кут ABC не є прямим;
 - 2) трикутник MKE є рівнобедреним;
 - 3) через точку на прямій можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної;
 - 4) промінь AC ділить кут BAK навпіл.
- 275.°** Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли жодна з висот трикутника не збігається з бісектрисою, проведеною з тієї самої вершини, то трикутник не є рівнобедреним.
- 276.°** Доведіть, використовуючи метод від супротивного, що коли сторони AB і BC трикутника ABC не рівні, то його медіана BD не є його висотою.
- 277.°** Доведіть методом від супротивного, що коли різниця двох кутів дорівнює 1° , то вони не можуть бути вертикальними.
- 278.°** Доведіть методом від супротивного, що з двох суміжних кутів хоча б один не менший від 90° .
- 279.°** Сформулюйте й доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.
- 280.°** Сформулюйте й доведіть ознаку рівності трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і кутом між медіаною та цією стороною.
- 281.°** Доведіть ознаку рівності трикутників за медіаною та кутами, на які вона розбиває кут трикутника.

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

282. Позначте на прямій точки A , B і C . Поставте замість крапок один зі знаків « $<$ », « $>$ » або « $=$ » так, щоб утворився правильний запис:
- 1) $AB + BC \dots AC$; 3) $AC + BC \dots AB$.
2) $AB + AC \dots BC$;
283. Кут між бісектрисою одного із суміжних кутів та їхньою спільною стороною становить $\frac{1}{3}$ другого із суміжних кутів. Знайдіть градусні міри цих суміжних кутів.

**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

284. Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють 4 см і 3 см. Знайдіть суму довжин усіх відрізків, що містяться всередині прямокутника (рис. 189).

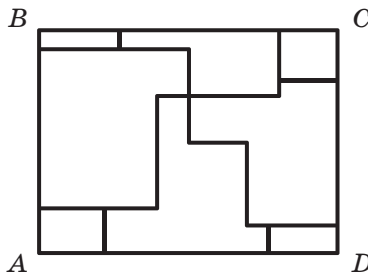
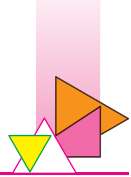


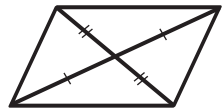
Рис. 189

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Трикутник є гострокутним, якщо:
- А) серед його кутів немає тупого;
Б) кожний його кут менший від прямого;
В) серед його кутів немає прямого;
Г) кожний його кут менший від тупого.



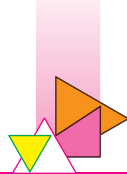
2. Якщо висота трикутника йому не належить, то цей трикутник є:
- прямокутним;
 - тупокутним;
 - рівностороннім;
 - гострокутним.
3. Два трикутники рівні, якщо:
- дві сторони одного трикутника дорівнюють двом сторонам другого трикутника;
 - сторона та два кути одного трикутника дорівнюють стороні та двом кутам другого трикутника;
 - дві сторони та кут одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту другого трикутника;
 - дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника.
4. Скільки пар рівних трикутників зображено на рисунку?
- 1;
 - 2;
 - 3;
 - 4.



5. Відомо, що точка M — середина сторони AC трикутника ABC . На промені BM поза трикутником відкладено відрізок ME , який дорівнює відрізку BM . Знайдіть EC , якщо $AB = 4,2$ см.
- 2,1 см;
 - 4,2 см;
 - 4,8 см;
 - 8,4 см.
6. Яке з поданих тверджень є правильним?
- Рівнобедрений трикутник — окремий вид різностороннього трикутника;
 - рівносторонній трикутник — окремий вид різностороннього трикутника;
 - рівносторонній трикутник — окремий вид рівнобедреного трикутника;
 - рівнобедрений трикутник — окремий вид рівностороннього трикутника.



7. Яке з поданих тверджень є хибним?
- А) Якщо висота трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на рівні відрізки, то цей трикутник є рівнобедреним;
 - Б) якщо медіана й бісектриса трикутника, проведені з однієї вершини, не збігаються, то цей трикутник не є рівнобедреним;
 - В) якщо трикутник рівносторонній, то довжина будь-якої його висоти дорівнює довжині будь-якої його бісектриси;
 - Г) якщо два кути трикутника рівні, то бісектриса третього кута ділить протилежну сторону трикутника на рівні відрізки.
8. Трикутник є рівностороннім, якщо:
- А) його сторона в три рази менша від його периметра;
 - Б) кожна його сторона в три рази менша від його периметра;
 - В) дві його висоти рівні;
 - Г) дві його бісектриси рівні.
9. Периметр рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 16 см. Периметр трикутника ABM , де точка M — середина відрізка AC , дорівнює 12 см. Знайдіть медіану BM .
- А) 4 см;
 - Б) 6 см;
 - В) 2 см;
 - Г) 5 см.
10. Кожна з точок X і Y рівновіддалена від кінців відрізка AB . Яке з поданих тверджень може бути хибним?
- А) Прямі XU та AB перпендикулярні;
 - Б) $\angle XAY = \angle XBY$;
 - В) $\angle AXB = \angle AYB$;
 - Г) $\angle AXY = \angle BXY$.
11. Точка M — середина відрізка AB . Точка X не належить серединному перпендикуляру відрізка AB , якщо:
- А) $XA = XB$;
 - Б) $XM = XB$;
 - В) $XM \perp AB$;
 - Г) $\angle XAM = \angle XBM$.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Основна властивість рівності трикутників

Для даного трикутника ABC і даного променя A_1M існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC , такий, що $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ і сторона A_1B_1 належить променю A_1M , а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої A_1M .

Теорема про пряму, перпендикулярну до даної

Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

Висота трикутника

Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.

Медіана трикутника

Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.

Бісектриса трикутника

Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

Перша ознака рівності трикутників:

за двома сторонами та кутом між ними

Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

**Друга ознака рівності трикутників:
за стороною та двома прилеглими до неї кутами**

Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Серединний перпендикуляр відрізка

Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.

Рівнобедрений трикутник

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.

Рівносторонній трикутник

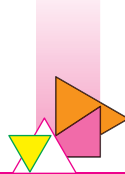
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.

Властивості рівнобедреного трикутника

У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.

Ознаки рівнобедреного трикутника

- Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

**Властивості трикутників, які випливають із властивостей та ознак рівнобедреного трикутника**

- У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
- У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- У рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються.
- У рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- У рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.
- Якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

§ 3



Як установити паралельність двох прямих? Які властивості мають паралельні прямі? Чому дорівнює сума кутів будь-якого трикутника? Які властивості має прямокутний трикутник? Опанувавши матеріал цього параграфу, ви отримаєте відповіді на поставлені запитання.





13. Паралельні прямі

Означення. Дві прямі називають **паралельними**, якщо вони не перетинаються.

На рисунку 190 зображено паралельні прямі a і b . Пишуть: $a \parallel b$ (читають: «прямі a і b паралельні» або «пряма a паралельна прямій b »).

Якщо два відрізки лежать на паралельних прямих, то їх називають паралельними. На рисунку 191 відрізки AB і CD паралельні. Пишуть: $AB \parallel CD$.



Рис. 190

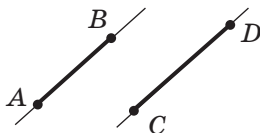


Рис. 191

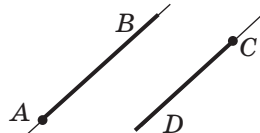


Рис. 192

Також можна говорити про паралельність двох променів, променя та відрізка, прямої та променя, відрізка та прямої. Наприклад, на рисунку 192 зображено паралельні промені AB і CD .

Теорема 13.1 (ознака паралельності прямих). Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 193 $a \perp c$ і $b \perp c$. Треба довести, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці M (рис. 194). Тоді через точку M , яка не належить прямій c , проходять дві прямі a і b , перпендикулярні до прямої c . Це суперечить тому, що через точку можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної (теорема 7.1). Таким

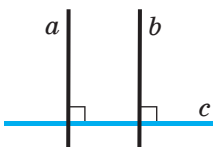


Рис. 193

чином, наше припущення є неправильним; отже, $a \parallel b$. ▲

Доведена теорема пояснює, чому за допомогою лінійки та косинця можна будувати паралельні прямі так, як показано на рисунку 195.

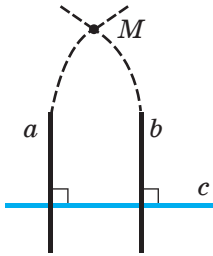


Рис. 194

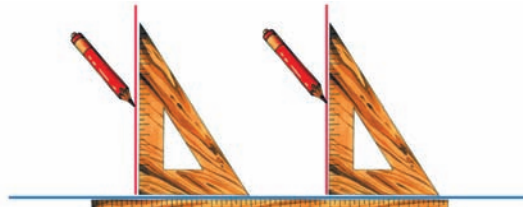


Рис. 195

Наслідок. Через дану точку M , яка не належить прямій a , можна провести пряму b , паралельну прямій a .

Доведення. \odot Нехай точка M не належить прямій a (рис. 196).

Проведемо (наприклад, за допомогою косинця) через точку M пряму c , перпендикулярну до прямої a . Тепер через точку M проведемо пряму b , перпендикулярну до прямої c . За ознакою паралельності прямих (теорема 13.1) отримуємо, що $a \parallel b$. \blacktriangle

Чи можна через точку M (рис. 196) провести ще одну пряму, паралельну прямій a ? Відповідь на це запитання дає основна властивість паралельних прямих.

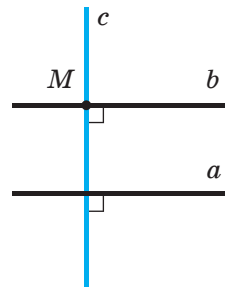


Рис. 196

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Теорема 13.2. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

Доведення. \odot Нехай $b \parallel a$ і $c \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel c$.

Припустимо, що прямі b і c не паралельні, а перетинаються в деякій точці M (рис. 197). Тоді маємо, що через точку M проходять дві прямі, паралельні прямій a , а це



суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $b \parallel c$. ▲

Задача. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні, пряма c перетинає пряму b у точці M (рис. 198). Припустимо, що пряма c не перетинає пряму a , тоді $c \parallel a$. Але в цьому випадку через точку M проходять дві прямі b і c , які паралельні прямій a , що суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення неправильне, отже, пряма c перетинає пряму a . ●

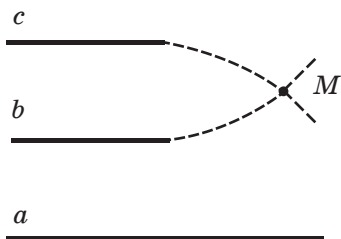


Рис. 197

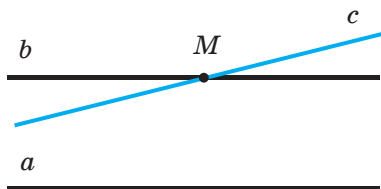


Рис. 198



1. Які дві прямі називають паралельними?
2. Яким символом позначають паралельність прямих?
3. Як читають запис $m \parallel n$?
4. Які відрізки називають паралельними?
5. Яке взаємне розміщення двох прямих, що перпендикулярні до третьої прямої?
6. Сформулюйте аксіому паралельності прямих.
7. Яке взаємне розміщення двох прямих, що паралельні третій прямій?
8. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то як ця пряма розміщена відносно другої?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

285.° Перерисуйте в зошит рисунок 199. Проведіть через кожну з точок A і B пряму, паралельну прямій m .

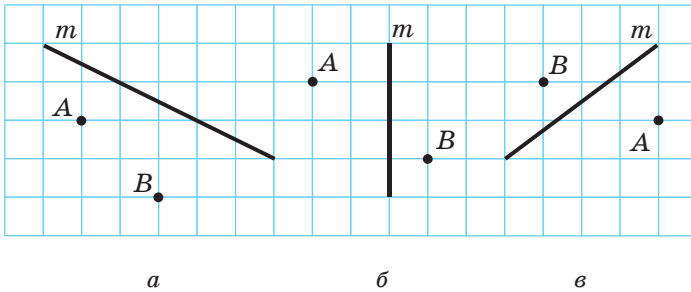


Рис. 199

286.° Накресліть трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні.

287.° Перерисуйте в зошит рисунок 200. Проведіть через точку B пряму m , паралельну прямій AC , а через точку D — пряму n , паралельну прямій AC . Яке взаємне розміщення прямих m і n ?

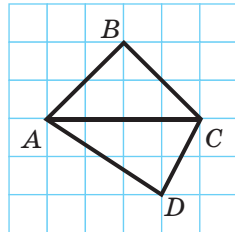
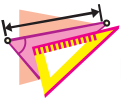


Рис. 200

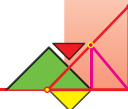


ВПРАВИ

288.° Чи можна провести пряму, яка була б паралельною кожній із прямих a і b , що перетинаються?

289.° Пряма a паралельна стороні AB трикутника ABC . Чи може пряма a бути паралельною стороні AC ? стороні BC ?

290.° Прямі a і b перетинаються. Чи можна провести таку пряму c , яка була б паралельною прямій a та перетинала пряму b ?



- 291.°** Чи можна стверджувати, що два відрізки є паралельними, якщо вони не мають спільних точок?
- 292.°** Чи можна стверджувати, що існує тільки один промінь, паралельний даній прямій, початком якого є дана точка?
- 293.°** Скільки можна провести відрізків, які паралельні даній прямій, через точку, що не належить цій прямій?
- 294.°** Прямі a і b перпендикулярні до прямої c , пряма d перетинає пряму a . Чи перетинає пряма d пряму b ?
- 295.**** Доведіть, що коли будь-яка пряма, яка перетинає пряму a , перетинає і пряму b , то прямі a і b паралельні.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 296.** На відрізку AB позначили точки C і D так, що $AC = BD$. Точка O — середина відрізка CD . Знайдіть відстань між точками C і D , якщо $AB = 21$ см, $AO : OD = 7 : 2$.
- 297.** Точка B належить прямій AC , промені BD і BF лежать у різних півплощинах відносно прямої AC , $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle ABF = 150^\circ$, BM — бісектриса кута DBF . Знайдіть кут MBC .
- 298.** У трикутнику ABC медіана CM дорівнює половині сторони AB , $\angle A = 47^\circ$, $\angle B = 43^\circ$. Чому дорівнює кут ACB ?



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 299.** Катруся та Євген підійшли до квадратного ставка, у середині якого знаходиться квадратний острів (рис. 201). На березі вони знайшли дві дошки, трохи коротші від ширини протоки між берегом ставка й островом. Як їм потрапити на острів, використовуючи ці дошки?



Рис. 201

14. Ознаки паралельності двох прямих

Якщо дві прямі a і b перетнути третьою прямою c , то утвориться вісім кутів (рис. 202). Прямую c називають **січною** прямих a і b .

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають **односторонніми**.

Кути 3 і 5, 4 і 6 називають **різносторонніми**.

Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають **відповідними**.

Теорема 14.1. *Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.*

Доведення. ☺ На рисунку 203 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Якщо $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (рис. 204), то паралельність прямих a і b випливає з ознаки паралельності прямих (теорема 13.1).

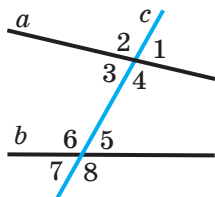


Рис. 202

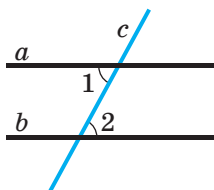


Рис. 203

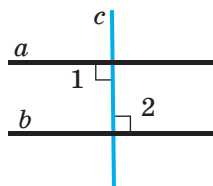


Рис. 204

Нехай тепер пряма c не перпендикулярна до жодної з прямих a і b . Позначимо A і B — точки перетину прямої c із прямими a і b відповідно. Позначимо точку M — середину



відрізка AB (рис. 205). Через точку M проведемо перпендикуляр ME до прямої a . Нехай пряма ME перетинає пряму b у точці F . Маємо: кути 1 і 2 рівні за умовою; кути 3 і 4 рівні як вертикальні. Отже, трикутники AME і BMF рівні за стороною та двома прилеглими до неї кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle AEM = \angle MFB = 90^\circ$. Ми показали, що прямі a і b перпендикулярні до прямої EF ; отже, вони паралельні. ▲

Теорема 14.2 Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180° , то прямі паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 206 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 суміжні, отже, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то $\angle 2 = \angle 3$. А кути 2 і 3 є різносторонніми, тому за теоремою 14.1 $a \parallel b$. ▲

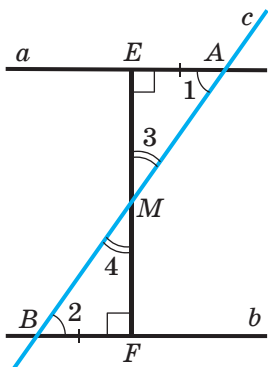


Рис. 205

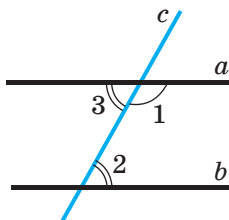


Рис. 206

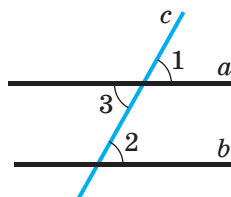


Рис. 207

Теорема 14.3. Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Доведення. ☉ На рисунку 207 пряма c є січною прямих a і b , $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $a \parallel b$.

Кути 1 і 3 рівні як вертикальні. Оскільки $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. Але кути 2 і 3 є різносторонніми. Тому за ознакою паралельності двох прямих (теорема 14.1) $a \parallel b$. ▲

Задача. На рисунку 208 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

Розв'язання. Для трикутників ABD і CDB маємо: $AB = CD$ і $\angle ABD = \angle CDB$ за умовою, BD — спільна сторона. Отже, трикутники ABD і CDB рівні за двома сторонами та кутом між ними, тобто за першою ознакою рівності трикутників.

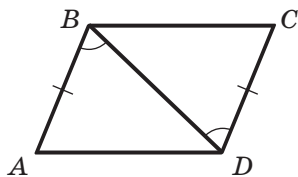


Рис. 208

Тоді $\angle BDA = \angle DBC$. Оскільки кути BDA і DBC — різносторонні при прямих BC і AD та січній BD і ці кути рівні, то $BC \parallel AD$. ●



1. Якими мають бути різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
2. Якими мають бути односторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?
3. Якими мають бути відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, щоб дані прямі були паралельними?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

300.° Проведіть дві прямі AB і CD . Проведіть пряму MK , яка перетинає кожную з прямих AB і CD . Позначте точку перетину прямих AB і MK буквою O , а прямих CD і MK — буквою E . Заповніть прогалини в тексті:

- 1) кути $\angle AOM$ і ... — відповідні;
- 2) кути $\angle AOE$ і ... — відповідні;
- 3) кути $\angle AOE$ і ... — різносторонні;
- 4) кути $\angle AOE$ і ... — односторонні.

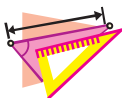
Укажіть, якими кутами (відповідними, різносторонніми чи односторонніми) є:

- 1) $\angle BOM$ і $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ і $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ і $\angle OEC$.



301.° Накресліть дві прямі та проведіть їхню січну. Пронумеруйте кути, утворені при перетині даних прямих січною. Укажіть серед цих кутів усі пари:

- 1) відповідних кутів;
- 2) односторонніх кутів;
- 3) різносторонніх кутів.



ВПРАВИ

302.° На рисунку 209 укажіть усі пари різносторонніх, односторонніх і відповідних кутів.

303.° Запишіть, які кути на рисунку 210 є:

- 1) односторонніми при прямих BC і AD та січній AB ;
- 2) односторонніми при прямих CE і CD та січній AD ;
- 3) різносторонніми при прямих BC і AD та січній CE ;
- 4) відповідними при прямих CE і CD та січній AD ;
- 5) односторонніми при прямих BC і AD та січній CE .

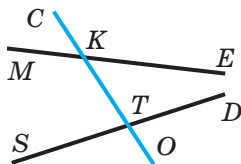


Рис. 209

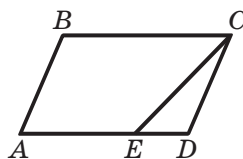


Рис. 210

304.° На яких із рисунків 211, a – $г$ прямі a і b паралельні?

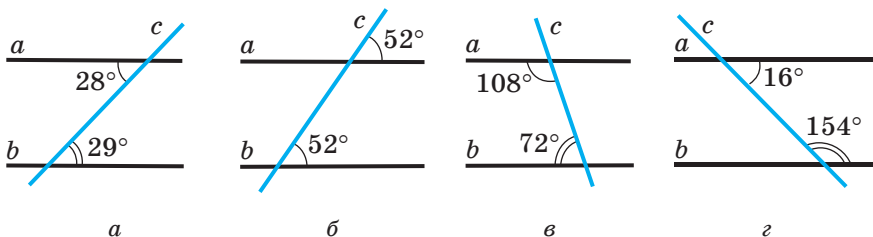


Рис. 211

305.° Чи паралельні зображені на рисунку 212 прямі a і b , якщо:

- 1) $\angle 3 = \angle 6$;
- 2) $\angle 2 = \angle 6$;
- 3) $\angle 4 = 125^\circ$, $\angle 6 = 55^\circ$;
- 4) $\angle 2 = 35^\circ$, $\angle 5 = 146^\circ$;
- 5) $\angle 1 = 98^\circ$, $\angle 6 = 82^\circ$;
- 6) $\angle 1 = 143^\circ$, $\angle 7 = 37^\circ$?

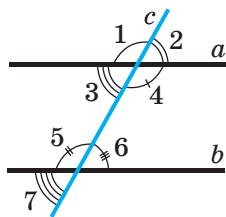


Рис. 212

306.° На яких із рисунків 213, a - $г$ прямі m і n паралельні?

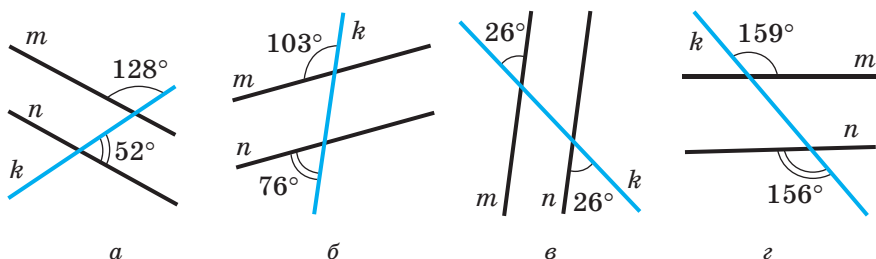


Рис. 213

307.° На рисунку 214 укажіть усі пари паралельних прямих.

308.° Запишіть, які прямі на рисунку 215 є паралельними, якщо $\angle 1 = 53^\circ$, $\angle 2 = 128^\circ$, $\angle 3 = 127^\circ$.

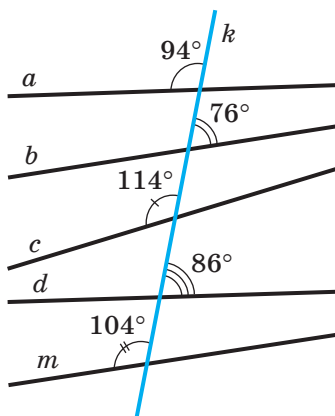


Рис. 214

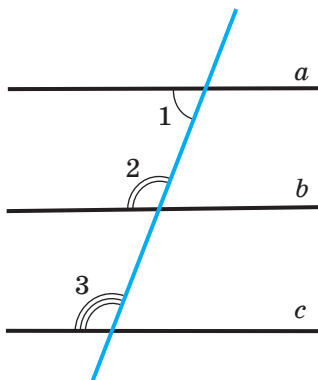


Рис. 215

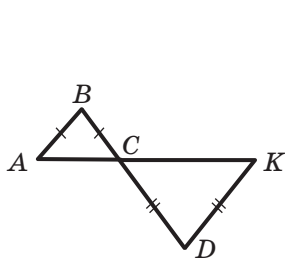


Рис. 216

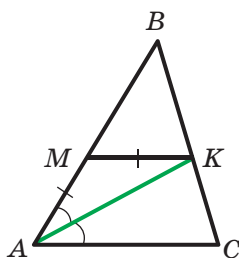


Рис. 217

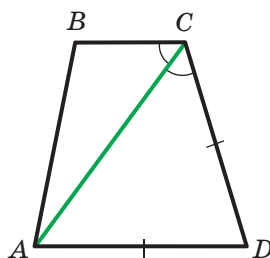


Рис. 218

- 309.°** На рисунку 216 $AB = BC$, $CD = DK$. Доведіть, що $AB \parallel DK$.
- 310.°** На рисунку 217 AK — бісектриса кута BAC , $AM = MK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$.
- 311.°** На рисунку 218 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.
- 312.°** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle A = 60^\circ$, кут BCD суміжний із кутом ACB , CM — бісектриса кута BCD . Доведіть, що $AB \parallel CM$.
- 313.°** Відрізки AB і CD перетинаються в точці O та діляться цією точкою навпіл. Доведіть, що $AC \parallel BD$.
- 314.°** На рисунку 219 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.
- 315.°** На рисунку 220 зображено прямі a , b і k . Відомо, що деяка пряма t перетинає пряму a . Чи перетинає пряма t пряму b ?
- 316.°** Яке взаємне розміщення прямих CD і EF на рисунку 221?
- 317.**** Кут ABC дорівнює 60° , а кут BCD — 120° . Чи можна стверджувати, що прямі AB і CD паралельні?

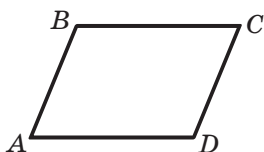


Рис. 219

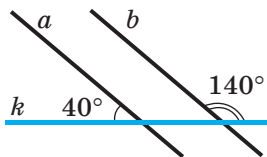


Рис. 220

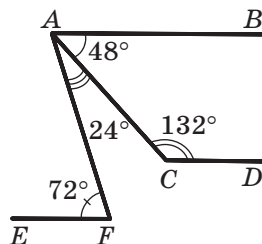


Рис. 221

- 318.** Кут між прямими a і c дорівнює куту між прямими b і c . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?
- 319.** Із восьми кутів, утворених при перетині прямих a і b прямою c , чотири кути дорівнюють по 40° , а решта чотири кути — по 140° . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?
- 320.** Пряма перетинає бісектрису BM трикутника ABC у точці O , яка є серединою відрізка BM , а сторону BC — у точці K . Доведіть, що коли $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.
- 321.** Відрізки AM і CK — медіани трикутника ABC . На продовженні відрізка AM за точку M відкладено відрізок MF , а на продовженні відрізка CK за точку K — відрізок KD так, що $MF = AM$, $KD = CK$. Доведіть, що точки B , D і F лежать на одній прямій.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 322.** Промінь OC розбиває кут AOB на два кути так, що $\angle AOC : \angle BOC = 3 : 5$. Знайдіть кут між променем OC і бісектрисою кута, суміжного з кутом AOB , якщо кут BOC на 42° більший за кут AOC .
- 323.** На рисунку 222 $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Доведіть, що $BM = BK$.
- 324.** Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC . Пряма BD перетинає відрізок AC у точці E . Доведіть, що $AE = EC$.

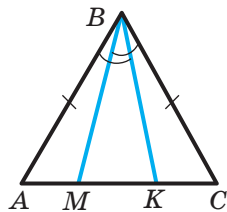


Рис. 222



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 325.** Наведіть приклад, коли спільною частиною (перерізом) трикутника й чотирикутника є восьмикутник.



П'ЯТИЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛІДА

У п. 6 ви дізналися, що за аксіоми приймають очевидні твердження. Тоді чому б, наприклад, теореми 1.1 і 5.1 не включити до списку аксіом, адже вони також очевидні? Відповідь на це запитання цілком природна: якщо якийсь твердження можна довести за допомогою аксіом або вже доведених теорем, то це твердження — теорема, а не аксіома.

Із цих позицій дуже повчальною є історія, пов'язана з п'ятим постулатом Евкліда (нагадаємо, що в оповіданні «З історії геометрії» ми сформулювали чотири перших постулати).

V постулат. І щоб кожного разу, коли пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними односторонні кути, сума яких менша від двох прямих кутів, ці прямі перетиналися по той бік від січної, з якого ця сума менша від двох прямих кутів (рис. 223).

Можна показати, що п'ятий постулат і сформульована нами в п. 13 аксіома паралельності прямих рівносильні, тобто з постулату випливає аксіома, і навпаки, з аксіоми випливає постулат.

Понад двадцять століть багато вчених намагалися довести п'ятий постулат, тобто вивести його з інших аксіом Евкліда. Лише на початку ХІХ ст. кілька математиків незалежно один від одного дійшли висновку: твердження, що *через дану точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній*, є аксіомою.

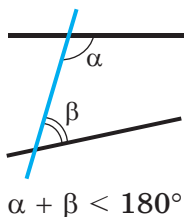


Рис. 223

Вам може здаватися, що в цьому висновку нічого особливого немає: приєднуємо аксіому паралельності до вже існуючого списку аксіом-правил, а далі доводимо теореми.

Однак якщо у футболі додати хоча б одне правило, наприклад дозволити польовим гравцям грати й руками, то ми отримаємо зовсім іншу гру.

Якщо п'ятий постулат — це правило, яке ми приймаємо, а не теорема, то його можна замінити іншим правилом — твердженням, протилежним йому.

Так і зробив видатний російський математик, професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський (1792–1856). Він замінив лише одне правило — аксіому паралельності прямих — іншим: *через точку, яка не лежить на даній прямій, проходять щонайменше дві прямі, які не перетинають дану*. Нова аксіома дозволила побудувати нову геометрію — неевклідову.



М. І. Лобачевський

Подібну ідею трохи пізніше запропонував угорський математик Янош Бойяї (1802–1860).

15. Властивості паралельних прямих

Теорема 15.1 (обернена до теореми 14.1). *Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні.*

Доведення. ☉ На рисунку 224 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Нехай $\angle 1 \neq \angle 2$. Тоді через точку K проведемо пряму a_1 так, щоб $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 224). Кути 3 і 2 є різносторонніми при прямих a_1 і b та січній c . Тоді за ознакою паралельності двох прямих (теорема 14.1) $a_1 \parallel b$. Отримали, що через точку K проходять дві прямі, паралельні прямій b . Це суперечить аксіомі паралельності прямих. Таким чином, наше припущення є неправильним; отже, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.2 (обернена до теореми 14.3). *Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні.*

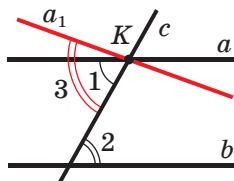


Рис. 224



Доведення. ☉ На рисунку 225 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 = \angle 2$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c . Але кути 3 й 1 рівні як вертикальні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.3 (обернена до теореми 14.2). *Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180° .*

Доведення. ☉ На рисунку 226 прямі a і b паралельні, пряма c — січна. Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

За властивістю паралельних прямих (теорема 15.1) кути 3 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих a і b та січній c . Але кути 3 й 1 суміжні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Отже, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. ▲

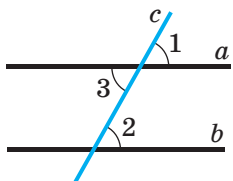


Рис. 225

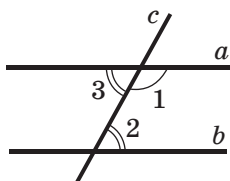


Рис. 226

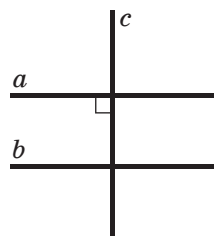


Рис. 227

Наслідок. *Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої (рис. 227).*

Доведіть цей наслідок самостійно.

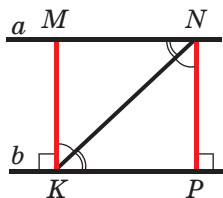


Рис. 228

🔑 **Задача 1.** Доведіть, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої.

Розв'язання. Нехай прямі a і b паралельні (рис. 228), M і N — дві довільні точки прямої a . Опустимо з них перпендикуляри MK і NP на пряму b . Доведемо, що $MK = NP$.

Розглянемо трикутники MKN і PNK . Відрізок KN — їхня спільна сторона. Оскільки $MK \perp b$ і $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а кути MKN і PNK рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і NP та січній KN .

Аналогічно кути MNK і PKN рівні як різносторонні при паралельних прямих MN і KP та січній KN .

Отже, трикутники MKN і PNK рівні за стороною та двома прилеглими кутами, тобто за другою ознакою рівності трикутників. Тоді $MK = NP$. ●

Означення. Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Наприклад, на рисунку 228 довжина відрізка MK — це відстань між паралельними прямими a і b .

Задача 2. На рисунку 229 відрізок AK — бісектриса трикутника ABC , $MK \parallel AC$. Доведіть, що трикутник AMK рівнобедрений.

Розв'язання. Оскільки AK — бісектриса трикутника ABC , то $\angle MAK = \angle KAC$.

Кути KAC і MKA рівні як різносторонні при паралельних прямих MK і AC та січній AK . Отже, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тоді трикутник AMK рівнобедрений. ●

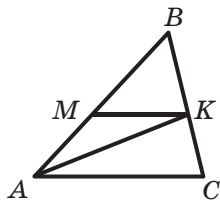
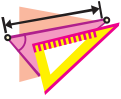


Рис. 229

1. Яку властивість мають різносторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
2. Яку властивість мають відповідні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
3. Яку властивість мають односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною?
4. Відомо, що пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих. Чи обов'язково вона перпендикулярна до другої прямої?
5. Що називають відстанню між двома паралельними прямими?



ВПРАВИ

326.° На рисунку 230 знайдіть кут 1.

327.° На рисунку 231 знайдіть кут 2.

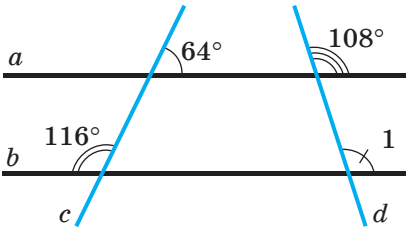


Рис. 230

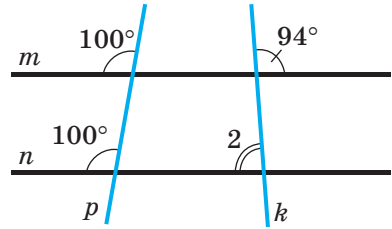


Рис. 231

328.° Різниця односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 50° . Знайдіть ці кути.

329.° Один з односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другий. Знайдіть ці кути.

330.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо:

1) один із цих кутів дорівнює 48° ;

2) відношення градусних мір двох із цих кутів дорівнює $2 : 7$.

331.° Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на 24° менший від іншого.

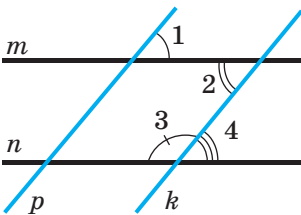


Рис. 232

332.° На рисунку 232 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50^\circ$. Знайдіть кути 2, 3 і 4.

333.° Пряма, паралельна основі AC рівнобедреного трикутника ABC , перетинає його бічні сторони AB і BC у точках D і F відповідно. Доведіть, що трикутник DBF рівнобедрений.

- 334.**° На продовженнях сторін AC і BC рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) за точки A і B позначили відповідно точки P і K так, що $PK \parallel AB$. Доведіть, що трикутник KPC рівнобедрений.
- 335.**° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Доведіть, що $CO = DO$.
- 336.**° Відрізки MK і DE перетинаються в точці F , $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Доведіть, що $\triangle MEF = \triangle KDF$.
- 337.**° Дайте відповідь на запитання.
- 1) Чи можуть обидва односторонніх кути при двох паралельних прямих і січній бути тупими?
 - 2) Чи може сума різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати 180° ?
 - 3) Чи можуть бути рівними односторонні кути при двох паралельних прямих і січній?
- 338.**° На рисунку 233 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $BC = AD$.
- 339.**° На рисунку 233 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.
- 340.**° На рисунку 234 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70^\circ$. Знайдіть кут MEF .
- 341.**° Через вершину B трикутника ABC (рис. 235) провели пряму MK , паралельну прямій AC , $\angle MBA = 42^\circ$, $\angle CBK = 56^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- 342.**° Пряма, проведена через вершину A трикутника ABC паралельно його протилежній стороні, утворює зі стороною AC кут, який дорівнює куту BAC . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

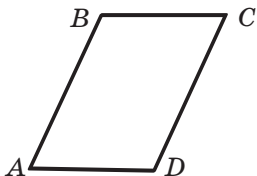


Рис. 233

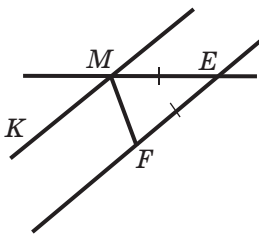


Рис. 234

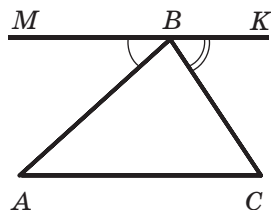


Рис. 235

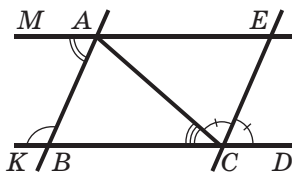


Рис. 236

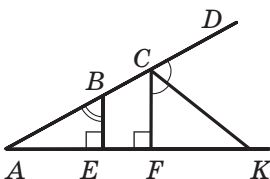


Рис. 237

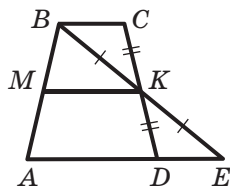


Рис. 238

- 343.* На рисунку 236 $\angle MAB = 50^\circ$, $\angle ABK = 130^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ$, CE — бісектриса кута ACD . Знайдіть кути трикутника ACE .
- 344.* На рисунку 237 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — бісектриса кута FCD , $\angle ABE = 62^\circ$. Знайдіть кут ACK .
- 345.* На рисунку 238 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Доведіть, що $AD \parallel MK$.
- 346.* На рисунку 239 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Доведіть, що $AE \perp BC$.
- 347.* Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC . Через довільну точку M його бісектриси BD проведено прямі, які паралельні його сторонам AB і BC та перетинають відрізок AC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $DE = DF$.
- 348.** На рисунку 240 $AB \parallel DE$. Доведіть, що $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.
- 349.** На рисунку 241 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 120^\circ$, $\angle CDE = 150^\circ$. Доведіть, що $BC \perp CD$.
- 350.** Через вершину B трикутника ABC провели пряму, паралельну його бісектрисі AM . Ця пряма перетинає пряму AC у точці K . Доведіть, що трикутник BAK рівнобедрений.

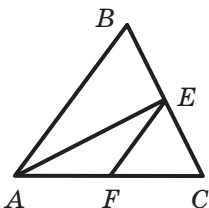


Рис. 239

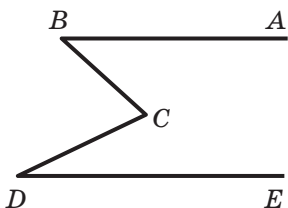


Рис. 240

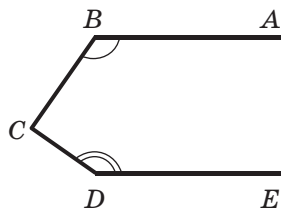


Рис. 241

- 351.** Через точку O перетину бісектрис AE і CF трикутника ABC провели пряму, паралельну прямій AC . Ця пряма перетинає сторону AB у точці M , а сторону BC — у точці K . Доведіть, що $MK = AM + CK$.
- 352.** Бісектриси кутів BAC і BCA трикутника ABC перетинаються в точці O . Через цю точку проведено прями, які паралельні прямим AB і BC та перетинають сторону AC у точках M і K відповідно. Доведіть, що периметр трикутника $МОК$ дорівнює довжині сторони AC .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 353.** На відрізку AB позначили точку C так, що $AC : BC = 2 : 1$. На відрізку AC позначили точку D так, що $AD : CD = 3 : 2$. У якому відношенні точка D ділить відрізок AB ?
- 354.** Відрізки AC і BD перетинаються в точці O , $AB = BC = CD = AD$. Доведіть, що $AC \perp BD$.
- 355.** У трикутнику $МОЕ$ на стороні $МО$ позначено точку A , у трикутнику $ТРК$ на стороні $ТР$ — точку B так, що $МА = ТВ$. Яка градусна міра кута $ВКР$, якщо $МО = ТР$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17^\circ$?



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

- 356.** На рисунку 242 зображено дуже складну замкнену ламану. Вона обмежує певну частину площини (многокутник). На рисунку позначають довільну точку. Як найшвидше визначити, належить ця точка многокутнику чи ні?

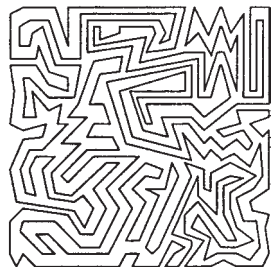


Рис. 242



16. Сума кутів трикутника. Нерівність трикутника

Трикутник — ключова фігура планіметрії. Світ трикутників різноманітний. Проте всім їм притаманна властивість, яку розкриває така теорема.

Теорема 16.1 Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Доведення. ☉ Розглянемо довільний трикутник ABC . Треба довести, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Через вершину B проведемо пряму a , паралельну прямій AC (рис. 243). Маємо: $\angle A$ і $\angle 1$ рівні як різносторонні при паралельних прямих a й AC та січній AB . Аналогічно доводимо, що $\angle C = \angle 3$. Але кути $1, 2, 3$ складають розгорнутий кут з вершиною B . Отже, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. ▲

Наслідок. Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.

Доведіть цей наслідок самостійно.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

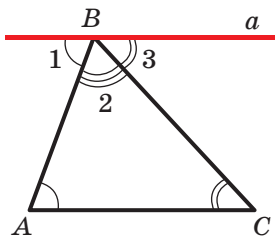


Рис. 243

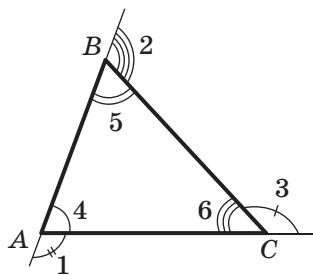


Рис. 244

Означення. Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

На рисунку 244 кути $1, 2, 3$ є зовнішніми кутами трикутника ABC .

Теорема 16.2 Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Доведення. ☉ На рисунку 244 кути $1, 2$ і 3 — зовнішні кути трикутника ABC . Треба довести, що $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$, $\angle 2 = \angle 4 + \angle 6$, $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5$.

Доведемо, наприклад, першу із цих трьох рівностей (решту рівностей доводять аналогічно).

За властивістю суміжних кутів $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$. Тоді $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, звідки $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ▲

Наслідок. *Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.*

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 16. (нерівність трикутника) *Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.*

Доведення. ☉ Розглянемо трикутник ABC (рис. 245). Треба довести, що: 1) $AB < AC + CB$; 2) $AC < AB + BC$; 3) $BC < BA + AC$.

Доведемо першу із цих нерівностей (дві інші доводять аналогічно).

Нехай нерівність, яку треба довести, є неправильною. Тоді $AB > AC + CB$ або $AB = AC + CB$.

1) Нехай $AB > AC + CB$. Тоді на стороні AB можна позначити точки C_1 і C_2 такі, що $AC = AC_1$ і $BC = BC_2$ (рис. 245). Оскільки ми припустили, що $AB > AC + CB$, то $AB > AC_1 + BC_2$. Отже, відрізки AC_1 і BC_2 не мають спільних точок.

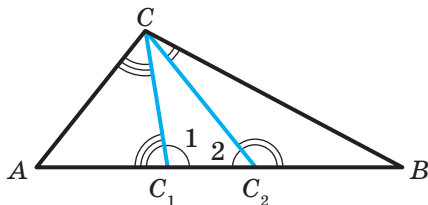


Рис. 245

Кути AC_1C і BC_2C є гострими як кути при основі рівнобедрених трикутників AC_1C і BC_2C відповідно. Тоді кути 1 і 2 є тупими як кути, суміжні з гострими. Отримали суперечність: у трикутнику C_1CC_2 два тупих кути.

2) Міркуючи аналогічно, можна показати (зробіть це самостійно), що рівність $AB = AC + CB$ також приводить до суперечності. ▲



З доведеної теореми випливає, що коли довжина одного з трьох даних відрізків не менша від суми довжин двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника (рис. 246).

У п. 23 ви дізнаєтеся, що коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Ви вже знаєте, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки, проти рівних кутів лежать рівні сторони (пп. 9, 10). Ці властивості доповнює така теорема.

Теорема 16.4 У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведення. ☉ 1) Розглянемо трикутник ABC , у якому $AB > BC$. Треба довести, що $\angle ACB > \angle A$ (рис. 247).

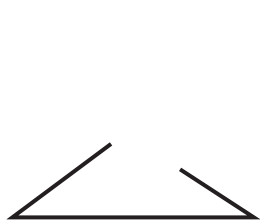


Рис. 246

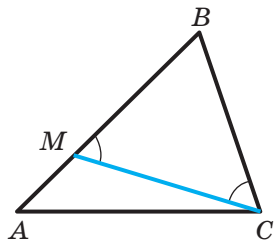


Рис. 247

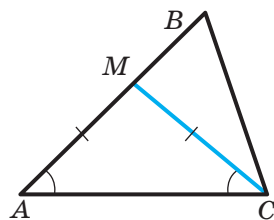


Рис. 248

Оскільки $AB > BC$, то на стороні AB знайдеться така точка M , що $BM = BC$. Отримали рівнобедрений трикутник MBC , у якому $\angle BMC = \angle BCM$.

Оскільки кут BMC — зовнішній кут трикутника AMC , то $\angle BMC > \angle A$. Наведений нижче «ланцюжок» нерівностей доводить першу частину теореми:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

2) Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle C > \angle A$. Треба довести, що $AB > BC$.

Оскільки $\angle ACB > \angle A$, то кут ACB можна поділити на два кути ACM і MCB так, що $\angle ACM = \angle A$ (рис. 248). Тоді трикутник AMC рівнобедрений з рівними сторонами MA і MC .

Для сторони BC запишемо нерівність трикутника: $MC + MB > BC$. Маємо: $AB = AM + MB = MC + MB > BC$. ▲

Зауважимо, що другу частину теореми 16.4 можна довести методом від супротивного: припустити, що $BC \geq AB$, а далі скористатися вже доведеною першою частиною теореми. Проведіть це доведення самостійно.

Задача. Медіана CM трикутника ABC дорівнює половині сторони AB . Доведіть, що трикутник ABC прямокутний.

Розв'язання. За умовою $AM = CM$ (рис. 249). Тоді в трикутнику AMC кути A та ACM рівні.

За умовою $BM = CM$, звідси випливає, що в трикутнику BMC кути B і BCM рівні.

У трикутнику ACB маємо: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle ACM$ і $\angle B = \angle BCM$, отримуємо: $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180^\circ$. Оскільки $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, то $2\angle ACB = 180^\circ$. Тоді $\angle ACB = 90^\circ$.

Отже, трикутник ABC прямокутний. ●

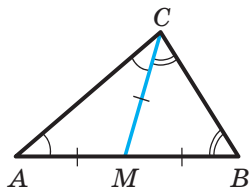
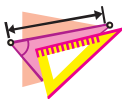


Рис. 249

1. Чому дорівнює сума кутів трикутника?
2. Яку найменшу кількість гострих кутів має будь-який трикутник?
3. Який кут називають зовнішнім кутом трикутника?
4. Який зв'язок між зовнішнім кутом трикутника та двома кутами трикутника, не суміжними з ним?
5. Порівняйте зовнішній кут трикутника з кутом трикутника, який не суміжний з ним.
6. Сформулюйте теорему про нерівність трикутника.
7. Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами та кутами трикутника.



ВПРАВИ

- 357.**° Знайдіть кут трикутника, якщо два інших його кути дорівнюють 35° і 96° .
- 358.**° Один із кутів трикутника в 3 рази менший від другого кута та на 35° менший від третього. Знайдіть кути трикутника.
- 359.**° Знайдіть кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $2 : 3 : 7$.
- 360.**° Знайдіть кути рівностороннього трикутника.
- 361.**° Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.
- 362.**° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 63° . Знайдіть кут при вершині цього трикутника.
- 363.**° Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 104° .
- 364.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині в 4 рази більший за кут при основі.
- 365.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 48° менший від кута при вершині.
- 366.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 110° ; 2) 50° . Скільки розв'язків має задача?
- 367.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: 1) 42° ; 2) 94° . Скільки розв'язків має задача?
- 368.**° Чи можуть сторони трикутника дорівнювати:
1) 6 см, 5 см, 12 см; 2) 6 см, 5 см, 11 см?
- 369.**° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, AK — бісектриса, $\angle BAK = 18^\circ$. Знайдіть кути AKC і ABC .
- 370.**° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, CK — бісектриса, $\angle A = 66^\circ$. Знайдіть кут AKC .
- 371.**° Бісектриси AK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O , $\angle BAC = 116^\circ$, $\angle BCA = 34^\circ$. Знайдіть кут AOC .
- 372.**° У рівнобедреному трикутнику ABC з кутом при вершині B , який дорівнює 36° , провели бісектрису AD . Доведіть, що трикутники ADB і CAD рівнобедрені.

- 373.**° У трикутнику ABC провели бісектрису BF . Знайдіть кут C , якщо $\angle A = 39^\circ$, $\angle AFB = 78^\circ$.
- 374.**° Доведіть, що коли один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших кутів, то цей трикутник прямокутний.
- 375.**° На рисунку 250 укажіть зовнішні кути:
- 1) при вершинах E та F трикутника MEF ;
 - 2) при вершині E трикутника MKE .
- 376.**° На рисунку 251 укажіть трикутники, для яких зовнішнім кутом є: 1) кут AMB ; 2) кут BMD .

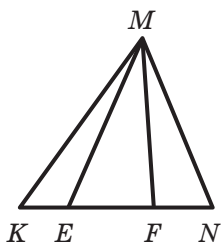


Рис. 250

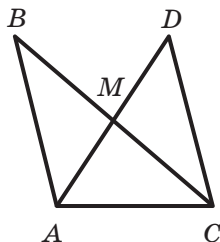


Рис. 251

- 377.**° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 75° . Чому дорівнює:
- 1) кут трикутника при цій вершині;
 - 2) сума двох кутів трикутника, не суміжних з ним?
- 378.**° Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від суміжного з ним кута трикутника? У разі ствердної відповіді вкажіть вид трикутника.
- 379.**° Визначте вид трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює куту трикутника, суміжному з ним.
- 380.**° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 136° , а один із кутів трикутника — 61° . Знайдіть невідомий кут трикутника, не суміжний з даним зовнішнім.
- 381.**° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 154° . Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів на 28° більший за другий.
- 382.**° Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 98° . Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо один із цих кутів у 6 разів менший від другого.



- 383.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при його вершині дорівнює 38° .
- 384.**° Порівняйте кути трикутника ABC , якщо:
1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC, BC > AC$.
- 385.**° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 34^\circ, \angle B = 28^\circ$. Порівняйте сторони AB, BC і AC .
- 386.**° Порівняйте сторони трикутника ABC , якщо:
1) $\angle C > \angle A > \angle B$; 2) $\angle B > \angle C, \angle A = \angle B$.
- 387.**° Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам другого трикутника, то й треті кути цих трикутників рівні.
- 388.**° Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює: 1) 54° ; 2) 112° . Скільки розв'язків має задача?
- 389.**° Зовнішній кут рівнобедреного трикутника дорівнює 130° . Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?
- 390.**° Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 20 см; 2) 15 см?
- 391.**° Довжини двох сторін трикутника дорівнюють 7 см і 9 см. Чи може периметр цього трикутника дорівнювати: 1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?
- 392.**° Чи існує трикутник, одна зі сторін якого на 2 см менша від другої та на 6 см менша від третьої, а периметр дорівнює 20 см?
- 393.**° Бісектриси кутів при основі AC рівнобедреного трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що кут AOC дорівнює зовнішньому куту трикутника ABC при вершині A .

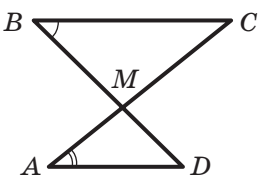


Рис. 252

394.° На рисунку 252 $BC \parallel AD, \angle A = 25^\circ, \angle B = 55^\circ$. Знайдіть кут CMD .

395.° Відрізок BK — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою $BC, \angle AKB = 105^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .

- 396.*** На стороні AB трикутника ABC позначили точку D так, що $BD = BC$, $\angle ACD = 15^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- 397.*** На сторонах трикутника ABC (рис. 253) позначено точки E та F так, що $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$.
- 398.*** На рисунку 254 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle ACD = 95^\circ$, $\angle D = 45^\circ$. Доведіть, що $AB = BC$.

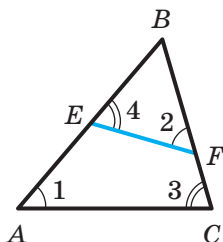


Рис. 253

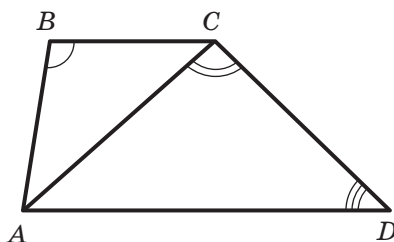


Рис. 254

- 399.*** Через вершину C трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна бісектрисі AM трикутника й перетинає пряму AB у точці K . Знайдіть кути трикутника AKC , якщо $\angle BAC = 70^\circ$.
- 400.*** У трикутнику ABC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O . Знайдіть кут AOC , якщо $\angle B = 100^\circ$.
- 401.*** Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.
- 402.*** Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.
- 403.*** Кут при основі AC рівнобедреного трикутника ABC у 2 рази більший за кут при вершині, AM — бісектриса трикутника. Доведіть, що $BM = AC$.
- 404.*** Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC . На стороні BC позначено точку M так, що $BM = AM = AC$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- 405.*** Доведіть, що в будь-якому трикутнику є кут:
1) не менший від 60° ; 2) не більший за 60° .




- 406.* Визначте вид трикутника, якщо:
- 1) один із його кутів більший за суму двох інших;
 - 2) будь-який із його кутів менший від суми двох інших.
- 407.* Визначте вид трикутника, якщо сума будь-яких двох його кутів більша за 90° .
- 408.* У трикутнику ABC кут B тупий. На продовженні сторони AB за точку A позначили довільну точку D . Доведіть, що $CD > AC$.
- 409.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle C > 90^\circ$. На стороні BC позначили довільну точку D . Доведіть, що $AD > AC$.
- 410.** Чи існує трикутник, дві бісектриси якого перпендикулярні?
- 411.** Чи існує трикутник, у якому одна бісектриса ділить навпіл другу бісектрису?
- 412.** Знайдіть кути трикутника ABC , якщо бісектриса кута B розбиває його на два рівнобедрених трикутники.
-  413.** Три точки A , B і C такі, що виконується рівність $AB = AC + CB$. Доведіть, що точка C є внутрішньою точкою відрізка AB .
- 414.** На прямій m (рис. 255) знайдіть таку точку C , щоб сума відстаней від неї до точок A і B була найменшою. Відповідь обґрунтуйте.
- 415.* Одна сторона трикутника дорівнює 2,8 см, а друга — 0,6 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.
- 416.* У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C перетинаються в точці O . Знайдіть кут BOC .
- 417.* Відрізок AM — медіана трикутника ABC , $\angle CAM > \angle BAM$. Доведіть, що $AB > AC$.



Рис. 255

- 418.* На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки E та F так, що $AC = AF = EF = BE$. Знайдіть кути трикутника ABC .

- 419.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 2$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. На стороні AC позначили точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть кути трикутника BDC .
- 420.* Доведіть, що сума довжин двох сторін трикутника більша за подвоєну довжину медіани, проведеної до третьої сторони.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

421. На прямій позначили точки A , B і C так, що точка B лежить між точками A і C , причому $BC = 2AB$. На відрізьку BC позначили точку D так, що $BD : DC = 3 : 7$. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CD , якщо відрізок CD на 16 см довший за відрізок BD .
422. На медіані BM трикутника ABC позначили точку O так, що $\angle OAC = \angle OCA$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

423. Чи існує шестикутник, жодні дві діагоналі якого не мають спільних точок, відмінних від вершин?

17. Прямокутний трикутник

На рисунку 256 зображено прямокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$.

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають **гіпотенузою**, а сторони, прилеглі до прямого кута, — **катетами** (рис. 256).

Для доведення рівності двох трикутників знаходять їхні рівні елементи. У будь-яких

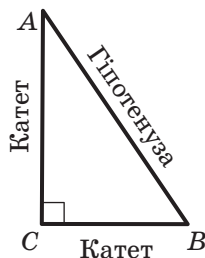
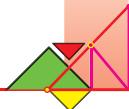


Рис. 256



двох прямокутних трикутників такі елементи є завжди — це прями кути. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати «персональні» ознаки рівності.

Теорема 17.1 (ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом). *Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.*

Доведення. ☼ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 257). Треба довести, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

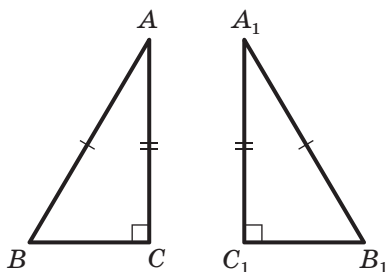


Рис. 257

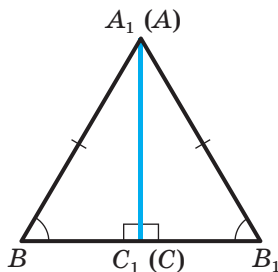


Рис. 258

Розмістимо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1 , вершина C — з вершиною C_1 , а точки B і B_1 лежали в різних півплощинах відносно прямої A_1C_1 (рис. 258).

Маємо: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Отже, кут BC_1B_1 — розгорнутий, і тому точки B , C_1 , B_1 лежать на одній прямій. Отримали рівнобедрений трикутник BA_1B_1 з бічними сторонами A_1B і A_1B_1 та висотою A_1C_1 (рис. 258). Тоді A_1C_1 — медіана цього трикутника, тобто $C_1B = C_1B_1$. Отже, трикутники A_1BC_1 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. ▲

Під час розв'язування задач зручно користуватися й іншими ознаками рівності прямокутних трикутників, які безпосередньо впливають з ознак рівності трикутників.

Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Очевидно, що коли гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то рівні й два інших гострих кути. Скориставшись цим твердженням, перелік ознак рівності прямокутних трикутників можна доповнити ще двома.

Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом. Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Задача. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

Розв'язання. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 259) $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, відрізки AD і A_1D_1 — бісектриси, $AD = A_1D_1$.

Маємо: $\angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$. Оскільки $AD = A_1D_1$, то прямокутні трикутники ACD і $A_1C_1D_1$ рівні

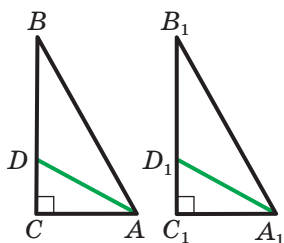


Рис. 259



за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $AC = A_1C_1$, і оскільки $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за катетом і прилеглим гострим кутом. ●



1. Який трикутник називають прямокутним?
2. Яку сторону прямокутного трикутника називають гіпотенузою?
3. Яку сторону прямокутного трикутника називають катетом?
4. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом.
5. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за двома катетами.
6. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом.
7. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом.
8. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом.
9. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

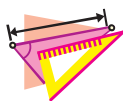
424.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте прямокутний трикутник:

- 1) катети якого дорівнюють 3 см і 4 см;
- 2) один із катетів якого дорівнює 2,5 см, а прилеглий до нього кут — 40° ;
- 3) гіпотенуза якого дорівнює 6 см, а один із гострих кутів — 70° .

Позначте побудовані трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

425.° За допомогою транспортира та лінійки побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:

- 1) з катетом, що дорівнює 5 см;
- 2) з гіпотенузою, що дорівнює 4 см.



ВПРАВИ

426.° На рисунку 260 зображено трикутник MKE з прямим кутом при вершині K . Укажіть:

- 1) катети та гіпотенузу трикутника;
- 2) катет, прилеглий до кута E ;
- 3) катет, протилежний куту M .

427.° На рисунку 261 AD — висота трикутника ABC . Знайдіть на цьому рисунку прямокутні трикутники, укажіть у кожному з них катети та гіпотенузу.

428.° Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 43° . Знайдіть другий гострий кут.

429.° У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено висоту AH . Знайдіть кут CAH , якщо $\angle B = 76^\circ$.

430.° Кут між основою рівнобедреного трикутника та висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює 19° . Знайдіть кути даного трикутника.

431.° На рисунку 262 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Доведіть, що $AB = CD$.

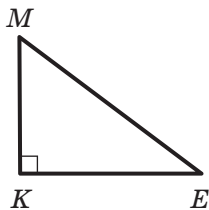


Рис. 260

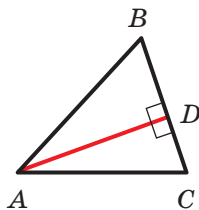


Рис. 261

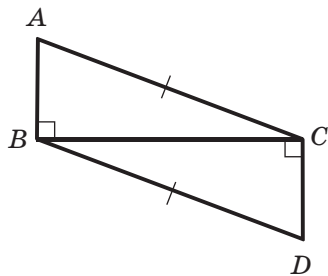


Рис. 262



- 432.°** На рисунку 263 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90^\circ$. Доведіть, що $\triangle MEO = \triangle FKO$.
- 433.°** Із точок A і B , які лежать в одній півплощині відносно прямої a , опущено перпендикуляри AM і BK на цю пряму, $AM = BK$. Доведіть, що $AK = BM$.
- 434.°** На рисунку 264 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Доведіть, що $BM = DK$.
- 435.°** На рисунку 265 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Доведіть, що $BE = BD$.

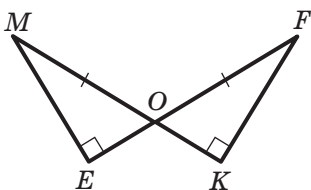


Рис. 263

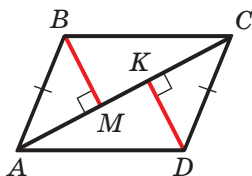


Рис. 264

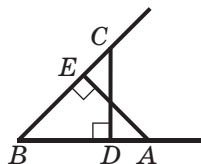


Рис. 265

- 436.°** На бісектрисі кута з вершиною в точці B позначили точку M , з якої опустили перпендикуляри MD і MC на сторони кута. Доведіть, що $MD = MC$.
- 437.°** На сторонах кута з вершиною в точці B позначили точки A і C так, що $AB = BC$. Через точки A і C провели прямі, які перпендикулярні до сторін BA і BC відповідно та перетинаються в точці O . Доведіть, що промінь BO — бісектриса кута ABC .
- 438.°** Доведіть, що висоти рівнобедреного трикутника, проведені до його бічних сторін, є рівними.
- 439.°** Доведіть, що коли дві висоти трикутника рівні, то цей трикутник є рівнобедреним.
- 440.°** Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прямого кута.
- 441.°** Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.
- 442.°** Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною з вершини прилеглого до цього катета гострого кута.

- 443.** Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.
- 444.** Доведіть, що в рівних трикутниках висоти, опущені на відповідні сторони, є рівними.
- 445.** Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною та двома висотами, проведеними з кінців цієї сторони.
- 446.** Доведіть рівність трикутників за стороною та проведеними до неї медіаною та висотою.
- 447.** Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K , які є серединами цих сторін. Доведіть, що вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK .
- 448.** Пряма перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках M і K відповідно. Вершини даного трикутника рівновіддалені від прямої MK . Доведіть, що точки M і K є серединами сторін AB і BC відповідно.
- 449.** Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H , $HK = HM$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
- 450.** Висоти ME і NF трикутника MKN перетинаються в точці O , $OM = ON$, $MF = KE$. Доведіть, що трикутник MKN рівносторонній.
- 451.** Чи можна стверджувати, що коли дві сторони й висота, проведена до третьої сторони, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, проведеним до третьої сторони, другого трикутника, то ці трикутники рівні?
- 452.** Доведіть рівність трикутників за двома кутами й висотою, проведеною з вершини третього кута.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 453.** Куты ABC і DBC суміжні, промінь BM належить куту ABC , промінь BK — куту DBC , $\angle MBC = \angle CBK = 30^\circ$, кут DBK у 5 разів більший за кут ABM . Знайдіть куты ABC і DBC .



454. На бічних сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $BM = BK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O . Доведіть, що: 1) трикутник AOC рівнобедрений; 2) пряма BO — серединний перпендикуляр відрізка AC .

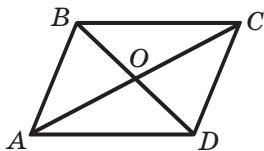


Рис. 266

455. На рисунку 266 $AB = CD$, $BC = AD$. Доведіть, що $AO = OC$.



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

456. Чи можна замостити площину фігурами, кожна з яких дорівнює фігурі, зображеній на рисунку 267?

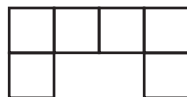


Рис. 267

18. Властивості прямокутного трикутника

Теорема 18.1. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Доведення. ☉ Будь-який із катетів лежить проти гострого кута, а гіпотенуза лежить проти прямого кута. Прямий кут більший за гострий кут, а в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (теорема 16.4). Тому гіпотенуза більша за будь-який із катетів. ▲

Наслідок. Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похилу, то перпендикуляр менший від похилої.

На рисунку 268 відрізок AB — перпендикуляр, відрізок AH — похила, $AB < AH$.

🔑 **Задача 1.** Доведіть, що катет, який лежить проти кута, величина якого дорівнює 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

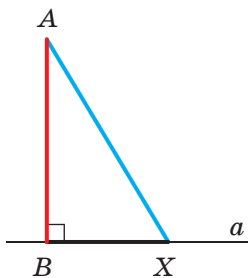


Рис. 268

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$.

Треба довести, що $BC = \frac{1}{2} AB$.

На промені BC відкладемо відрізок CD , який дорівнює відрізку BC (рис. 269). Проведемо відрізок AD . Тоді в трикутниках ABC і ADC маємо: $\angle ACB = \angle ACD = 90^\circ$, сторони BC і CD рівні за побудовою, AC — спільна сторона цих трикутників. Отже, ці трикутники рівні за двома катетами. Тоді $\angle DAC = 30^\circ$, звідси $\angle BAD = 2 \angle DAC = 60^\circ$. Маємо: $\angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Отже, $\angle ADB = 60^\circ$ і трикутник ABD рівносторонній. Тоді $BC = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB$. ●

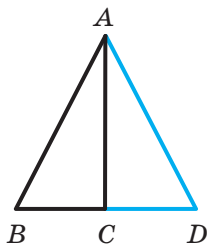


Рис. 269

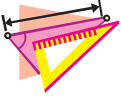
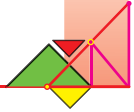
Задача 2. Доведіть, що коли катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30° .

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC , у якому $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = \frac{1}{2} AB$. Треба довести, що $\angle BAC = 30^\circ$.

На промені BC відкладемо відрізок CD , який дорівнює відрізку BC (рис. 269). Тоді $AB = BD$. Крім того, відрізок AC є медіаною та висотою трикутника BAD , отже, за ознакою рівнобедреного трикутника $AB = AD$. Отримуємо, що $AB = BD = AD$, тому трикутник BAD рівносторонній, отже, $\angle BAD = 60^\circ$.

Оскільки відрізок AC — бісектриса трикутника BAD , то $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$. ●

1. Яка зі сторін прямокутного трикутника є найбільшою?
2. Яку властивість має катет, який лежить проти кута, що дорівнює 30° ?
3. Яку градусну міру має кут, який лежить проти катета, що дорівнює половині гіпотенузи?



ВПРАВИ

- 457.° Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 24 см, 10 см і 26 см. Чому дорівнює найбільший катет даного трикутника?
- 458.° У прямокутному трикутнику DEF гіпотенуза DE дорівнює 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Знайдіть катет FE .
- 459.° У прямокутному трикутнику MKC відомо, що $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу CK .
- 460.° У рівносторонньому трикутнику ABC точка D — середина сторони AB . Із цієї точки опущено перпендикуляр DE на сторону AC . Знайдіть відрізки, на які точка E розбиває відрізок AC , якщо сторона даного трикутника дорівнює 16 см.
- 461.° Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30° , а різниця гіпотенузи й меншого катета — 5 см. Знайдіть ці сторони трикутника.
- 462.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, CK — висота, $AC = 10$ см. Знайдіть відрізок BK .
- 463.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD — висота, $BD = 7$ см. Знайдіть гіпотенузу AB .
- 464.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, CK — висота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Знайдіть кут B .
- 465.° На рисунку 270 AB — перпендикуляр, AC — похила, $AC = 2$ см. Знайдіть кут ACB і довжину перпендикуляра AB , якщо ця довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.
- 466.° Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один із кутів — 120° . Знайдіть висоту трикутника, проведену з вершини кута при його основі.

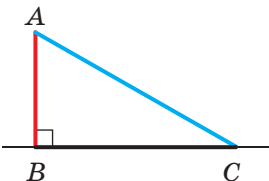


Рис. 270

- 467.° У рівнобедреному трикутнику ABC з основою BC проведено висоту BM завдовжки 7,5 см, $\angle MBC = 15^\circ$. Знайдіть бічну сторону трикутника.
- 468.° Бісектриси AM і BK рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O . Доведіть, що $AO : OM = 2 : 1$.

- 469.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Серединний перпендикуляр відрізка AB перетинає його в точці M , а відрізок BC — у точці K . Доведіть, що $MK = \frac{1}{3}BC$.
- 470.** У трикутнику MKE відомо, що $\angle K = 90^\circ$, $\angle E = 30^\circ$, $KE = 12$ см. Знайдіть бісектрису MC трикутника.
- 471.** У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, відрізок AD — бісектриса, відрізок CD на 3 см менший від відрізка BD . Знайдіть бісектрису AD .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

472. На рисунку 271 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Доведіть, що трикутник FBE рівнобедрений.
473. Через вершини A і B трикутника ABC проведено прямі, які перпендикулярні до бісектриси кута ACB та перетинають прямі BC і AC у точках M і K відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AC > BC$, $CM = 6$ см, $BK = 2$ см, $AB = 7$ см.
474. На рисунку 272 $BC \parallel AD$, промінь CA — бісектриса кута BCD , $AD = 9$ см, $AC = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника CAD .

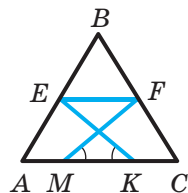


Рис. 271

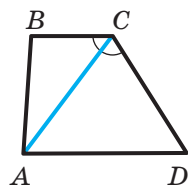


Рис. 272



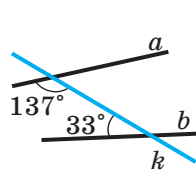
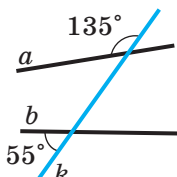
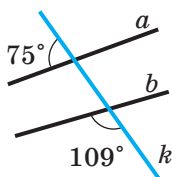
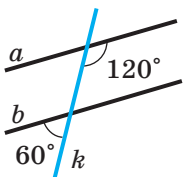
СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

475. Розріжте трикутник на чотири частини так, щоб, перегорнувши три з них, можна було б знову скласти трикутник, який дорівнює даному.



ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

- Яке з поданих тверджень є правильним?
 - Якщо два відрізки не мають спільних точок, то вони паралельні.
 - Якщо два промені не мають спільних точок, то вони паралельні.
 - Якщо промінь і відрізок не мають спільних точок, то вони паралельні.
 - Якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони паралельні.
- Яке з поданих тверджень є правильним?
 - Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один відрізок, паралельний цій прямій.
 - Через точку, яка не належить даній прямій, проходить тільки один промінь, паралельний цій прямій.
 - Через точку, яка не належить даній прямій, проходить безліч прямих, не паралельних цій прямій.
 - Через точку, яка не належить даній прямій, проходять тільки дві прямі, паралельні цій прямій.
- Яке з поданих тверджень є неправильним?
 - Якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
 - Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \parallel c$.
 - Якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \perp c$.
 - Якщо $a \parallel b$ і $c \perp b$, то $c \perp a$.
- На якому з рисунків прямі a і b паралельні?
 -
 -
 -
 -



- Яке з поданих тверджень є неправильним?
 - Якщо сума кутів однієї пари різносторонніх кутів дорівнює сумі кутів другої пари, то прямі не паралельні.
 - Якщо різносторонні кути не рівні, то прямі не паралельні.



ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Паралельні прямі

Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих)

Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Ознаки паралельності двох прямих

- Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180° , то прямі паралельні.
- Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180° .

Відстань між паралельними прямими

Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

Сума кутів трикутника

Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

Нерівність трикутника

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Порівняння сторін і кутів трикутника

У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

Гіпотенуза та катет

Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Ознаки рівності прямокутних трикутників

- *За гіпотенузою та катетом:* якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- *За двома катетами:* якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- *За катетом і прилеглим гострим кутом:* якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *За катетом і протилежним гострим кутом:* якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.



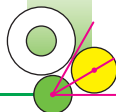
- *За гіпотенузою та гострим кутом:* якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Властивості прямокутного трикутника

- Гіпотенуза більша за катет.
- Катет, що лежить проти кута величиною в 30° , дорівнює половині гіпотенузи.
- Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30° .

У цьому параграфі ви ознайомитеся з властивостями кола. Вивчите взаємне розміщення кола та прямої, кола та трикутника. Дізнаєтеся про особливі фігури, усі точки яких мають одну й ту саму властивість.





19. Геометричне місце точок. Коло та круг

Будь-яка множина точок — це геометрична фігура. Зобразити довільну фігуру легко: усе, що намалюєте, — це геометрична фігура (рис. 273). Однак вивчати фігури, які складаються з хаотично розміщених точок, навряд чи доцільно. Тому розумно виокремити той клас фігур, усі точки яких мають певну характерну властивість. Кожну з таких фігур називають **геометричним місцем точок**.

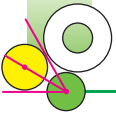


Рис. 273

Означення. Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Образно ГМТ можна подати так: задають певну властивість, а потім на білій площині *усі точки*, які мають цю властивість, фарбують у червоний колір. Та «червона фігура», яку при цьому отримують, і є ГМТ.

Наприклад, позначимо дві точки A і B . Для всіх точок задамо властивість: одночасно належати променям AB і BA .



Зрозуміло, що цю властивість мають усі точки відрізка AB і тільки вони (рис. 274). Тому відрізок AB є ГМТ, які мають указану властивість.

Розглянемо перпендикулярні прямі a і b . Для всіх точок задамо властивість: належати прямій b і знаходитися на відстані 1 см від прямої a . Очевидно, що точки A і B (рис. 275) задовольняють ці вимоги. Також зрозуміло, що жодна точка, відмінна від A і B , цієї властивості не має. Отже, шукане ГМТ є фігурою, яка складається з двох точок A і B (рис. 275).



Рис. 274

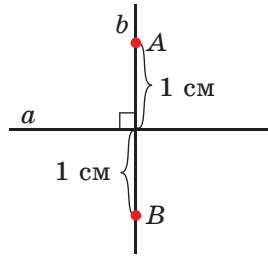


Рис. 275

Щоб якусь множину точок можна було називати ГМТ, які мають певну властивість, треба довести дві взаємно обернені теореми:

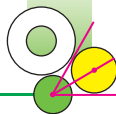
- 1) **пряма теорема:** *кожна точка даної множини має задану властивість;*
- 2) **обернена теорема:** *якщо точка має задану властивість, то вона належить даній множині.*

Теорема 19.1. *Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.*

Пряма теорема. *Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців.*

Доведення. ☉ Згідно з теоремою 8.2 кожна точка серединного перпендикуляра має цю властивість.

Обернена теорема. *Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.*



Доведення. ☉ Згідно з теоремою 11.2, якщо точка має цю властивість, то вона належить серединному перпендикуляру. ▲

Теорема 19.2 Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

Пряма теорема. Кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.

Доведення. ☺ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Розглянемо довільну точку X , яка не збігається з вершиною кута ABC і належить його бісектрисі. Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC (рис. 276). Доведемо, що $XM = XN$.

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, $\angle MBX = \angle NBX$, оскільки BX — бісектриса кута ABC . Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та гострим кутом. Звідси $XM = XN$. ▲

Обернена теорема. Якщо точка, що належить куту, рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.

Доведення. ☺ Очевидно, що вершина кута має цю властивість.

Розглянемо довільну точку X , яка належить куту ABC , не збігається з його вершиною та рівновіддалена від його сторін (рис. 276). Опустимо перпендикуляри XM і XN відповідно на сторони BA і BC . Треба довести, що $\angle MBX = \angle NBX$.

У прямокутних трикутниках BXM і BXN гіпотенуза BX — спільна, відрізки XM і XN рівні за умовою. Отже, трикутники BXM і BXN рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $\angle MBX = \angle NBX$. ▲

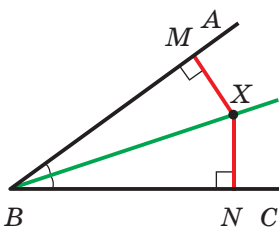


Рис. 276

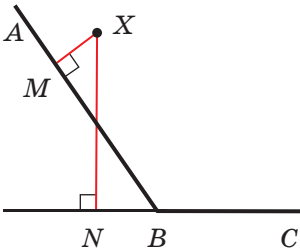
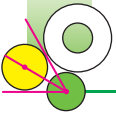


Рис. 277

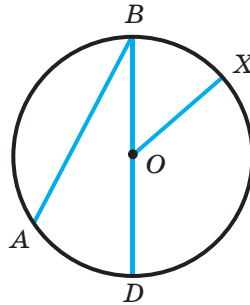


Рис. 278

Зауважимо, що доведення теореми буде повним, якщо показати, що рівновіддаленість точки кута від його сторін виключає можливість, коли одна з точок M або N належить продовженню сторони кута (рис. 277). Дослідити цю ситуацію ви можете на занятті математичного гуртка.

Зазначимо також, що доведена теорема справедлива й для розгорнутого кута.

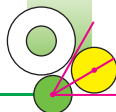
Означення. Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу.

Задану точку називають центром кола. На рисунку 278 точка O — центр кола.

Будь-який відрізок, який сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола. Довжину цього відрізка також прийнято називати радіусом. На рисунку 278 відрізок OX — радіус. З означення випливає, що всі радіуси одного кола рівні.

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. На рисунку 278 відрізки AB і BD — хорди. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром. На рисунку 278 відрізок BD — діаметр кола. Очевидно, що $BD = 2OX$, тобто діаметр кола вдвічі більший за його радіус.

З курсу математики 6 класу ви знаєте, що фігуру, обмежену колом, називають кругом (рис. 279). Тепер означення круга можна сформулювати за допомогою поняття ГМТ.



Означення. **Кругом** називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне число.

Задану точку називають **центром круга**. Радіус кола, яке обмежує круг, називають **радіусом круга**.

Якщо X — довільна точка круга із центром O та радіусом R , то $OX \leq R$ (рис. 279). Якщо $OX < R$, то говорять, що точка X лежить усередині кола, яке обмежує даний круг. Точка Y не належить кругу (рис. 279). У цьому разі говорять, що точка Y лежить поза колом, яке обмежує круг.

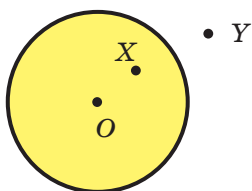


Рис. 279

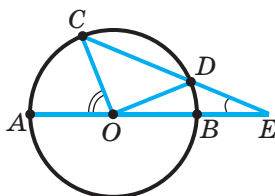


Рис. 280

З означення круга випливає, що коло, яке обмежує круг, йому належить.

Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

Задача. На продовженні хорди CD кола із центром O за точку D позначено точку E таку, що відрізок DE дорівнює радіусу кола. Пряма OE перетинає дане коло в точках A і B (рис. 280). Доведіть, що $\angle AOC = 3 \angle CEO$.

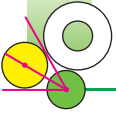
Розв'язання. Нехай $\angle CEO = \alpha$.

Оскільки трикутник ODE рівнобедрений, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

Кут ODC — зовнішній кут трикутника ODE . Тоді $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Оскільки трикутник COD рівнобедрений, то маємо: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

Кут AOC — зовнішній кут трикутника COE . Тоді $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, тобто $\angle AOC = 3 \angle CEO$. ●

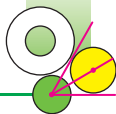


1. Яку множину точок називають геометричним місцем точок?
2. Які дві теореми треба довести, щоб деяку множину точок можна було назвати ГМТ, які мають певну властивість?
3. Яка фігура є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Яка фігура є геометричним місцем точок, що належать куту й рівновіддалені від його сторін?
5. Що називають колом?
6. Що називають радіусом кола?
7. Що називають хордою кола?
8. Що називають діаметром кола?
9. Як пов'язані між собою діаметр і радіус кола?
10. Що називають кругом?
11. Чи належить колу його центр?
12. Чи належить кругу його центр?
13. Яка нерівність виконується для будь-якої точки A , що належить кругу із центром O та радіусом R ?
14. Яка нерівність виконується для будь-якої точки B , що не належить кругу із центром O та радіусом R ?

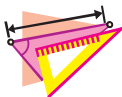


ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 476.° Накресліть коло із центром O та радіусом 3,5 см. Позначте на цьому рисунку які-небудь:
- 1) точки A і B такі, що $OA < 3,5$ см, $OB < 3,5$ см;
 - 2) точки C і D такі, що $OC = 3,5$ см, $OD = 3,5$ см;
 - 3) точки E і F такі, що $OE > 3,5$ см, $OF > 3,5$ см.
- 477.° Накресліть відрізок AB завдовжки 3 см. Знайдіть точку, віддалену від кожного з кінців відрізка AB на 2 см. Скільки існує таких точок?



- 478.° Накресліть відрізок CD завдовжки 4 см. Знайдіть точку, віддалену від точки C на 2,5 см, а від точки D — на 3,5 см. Скільки існує таких точок?
- 479.° Накресліть коло, діаметр якого дорівнює 7 см. Позначте на колі точку A . Знайдіть на колі точки, віддалені від точки A на 4 см.



ВПРАВИ

- 480.° На рисунку 281 зображено коло із центром B . Укажіть радіус, хорду й діаметр кола. Скільки зображено на рисунку радіусів? хорд?

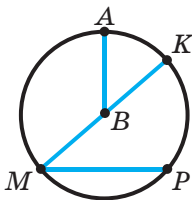


Рис. 281

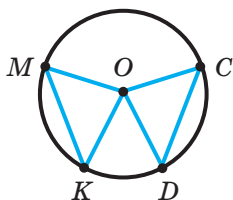


Рис. 282

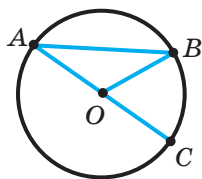


Рис. 283

- 481.° Хорди AB і CD кола із центром O рівні. Доведіть, що $\angle AOB = \angle COD$.
- 482.° На рисунку 282 точка O — центр кола, $\angle COD = \angle MOK$. Доведіть, що хорди CD і MK рівні.
- 483.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $\angle BAC = \angle CDB$.
- 484.° Відрізки MK і EF — діаметри кола із центром O , $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника FOK .
- 485.° Відрізки AC і AB — відповідно діаметр і хорда кола із центром O , $\angle BAC = 26^\circ$ (рис. 283). Знайдіть кут BOC .
- 486.° Відрізки MP і MK — відповідно хорда й діаметр кола із центром O , $\angle POK = 84^\circ$ (рис. 284). Знайдіть кут MPO .

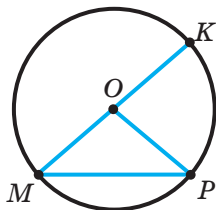
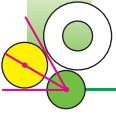



Рис. 284



- 487.° Відрізки AB і AC — відповідно діаметр і хорда кола, хорда AC дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть кут BAC .
- 488.° Відрізок CD — діаметр кола із центром O . На колі позначено точку E так, що $\angle COE = 90^\circ$. Доведіть, що $CE = DE$.
- 489.° Чому дорівнює діаметр кола, якщо відомо, що він на 4 см більший за радіус даного кола?
- 490.° Відрізки AB і CD — діаметри кола. Доведіть, що $AC \parallel BD$.
- 491.° Хорда перетинає діаметр кола під кутом 30° і ділить його на відрізки завдовжки 4 см і 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.
- 492.° Хорда CD перетинає діаметр AB у точці M , $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60^\circ$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 285). Знайдіть хорду CD .
- 493.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які проходять через дану точку.
- 494.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які проходять через дві дані точки.
- 495.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних прямих, які перетинаються.
- 496.** Знайдіть геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, які мають спільну основу.
- 497.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих.
- 498.** Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної прямої на задану відстань.
-  499.** Відрізок AB — діаметр кола, M — довільна точка кола, відмінна від точок A і B . Доведіть, що $\angle AMB = 90^\circ$.
- 500.* Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > BX$.
- 501.* Дано точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $AX > AB$.

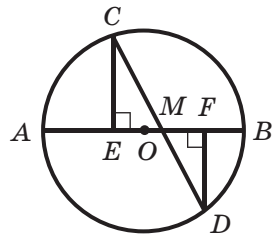
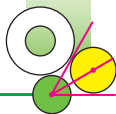


Рис. 285



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

502. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено бісектриси AD і CE . Доведіть, що $AE = ED$.
503. Із точки O через точки A , B і C проведено промені OA , OB і OC . Відомо, що $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 110^\circ$, $\angle AOC = 170^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .
504. На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $BM = CM$, промінь MK — бісектриса кута AMC . Доведіть, що $MK \parallel BC$.
505. У гострокутному трикутнику один із зовнішніх кутів дорівнює 160° . Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти, проведені з двох інших вершин трикутника.



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

506. На рисунку 286 прямокутник $ABCD$ складено з квадратів. Знайдіть сторону найбільшого квадрата, якщо сторона найменшого квадрата дорівнює 1.

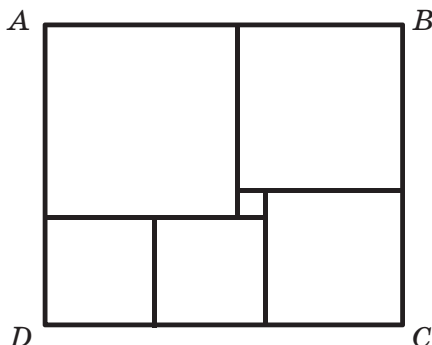
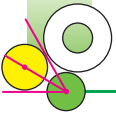


Рис. 286



20. Властивості кола. Дотична до кола

Теорема 20.1. *Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.*

Доведення. ☉ Якщо хорда є діаметром, то висновок теореми є очевидним.

На рисунку 287 зображено коло із центром O , M — точка перетину діаметра CD і хорди AB , відмінної від діаметра кола, $CD \perp AB$. Доведемо, що $AM = MB$.

Проведемо радіуси OA й OB . У рівнобедреному трикутнику AOB ($OA = OB$) відрізок OM — висота, а отже, і медіана, тобто $AM = MB$. ▲

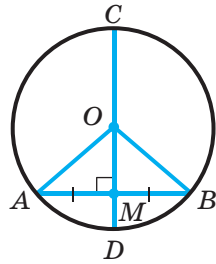


Рис. 287

Теорема 20.2 *Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.*

Доведіть цю теорему самостійно. Подумайте, чи буде правильним це твердження, якщо хорда є діаметром кола.

На рисунку 288 зображено всі можливі випадки розміщення прямої та кола: вони не мають спільних точок (рис. 288, а), мають дві спільні точки (рис. 288, б), мають одну спільну точку (рис. 288, в).

Означення. Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають **дотичною** до кола.

На рисунку 288, в пряма a — дотична до кола із центром у точці O , A — точка дотику.

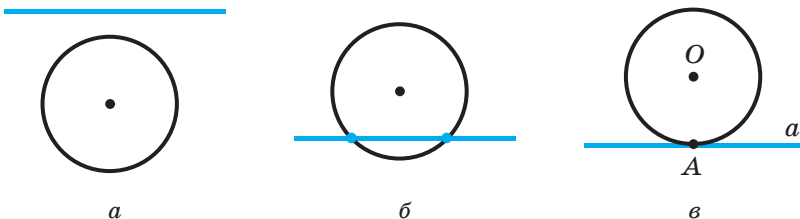


Рис. 288

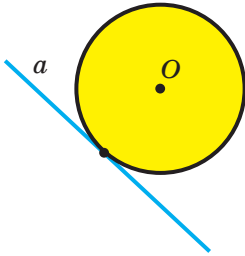
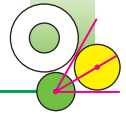


Рис. 289

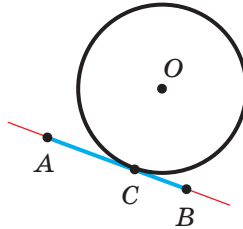


Рис. 290

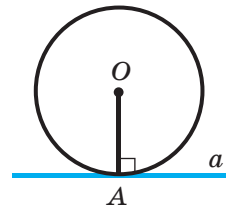


Рис. 291

Дотична до кола має тільки одну спільну точку з кругом, обмеженим цим колом. Також говорять, що ця пряма є **дотичною до круга**, обмеженого даним колом. Так, на рисунку 289 пряма a — дотична до кола із центром у точці O .

Якщо відрізок (промінь) належить дотичній до кола та має із цим колом спільну точку, то говорять, що відрізок (промінь) *дотикається* до кола. Наприклад, на рисунку 290 зображено відрізок AB , який дотикається до кола в точці C .

Теорема 20.3 (властивість дотичної). *Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.*

Доведення. ⊙ На рисунку 291 зображено коло із центром O , A — точка дотику прямої a та кола. Треба довести, що $OA \perp a$.

Припустимо, що це не так, тобто відрізок OA — похила до прямої a . Тоді з точки O опустимо перпендикуляр OM на пряму a (рис. 292). Оскільки точка A — єдина спільна точка прямої a та кола із центром O , обмеженого цим колом, то точка M не належить цьому колу. Звідси $OM = MB + OB$, де B — точка перетину кола й перпендикуляра OM . Відрізки OA й OB рівні як радіуси кола. Таким чином, $OM > OA$. Отримали суперечність: перпендикуляр OM більший за похилу OA .

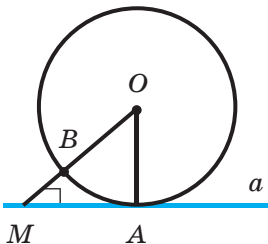
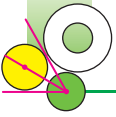


Рис. 292

Отже, $OA \perp a$. ▲



Теорема 20.4 (ознака дотичної до кола). Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Доведення. ☉ На рисунку 291 зображено коло із центром у точці O , відрізок OA — його радіус, точка A належить прямій a , $OA \perp a$. Доведемо, що пряма a — дотична до кола.

Нехай пряма a не є дотичною, а має ще одну спільну точку B з колом (рис. 293). Тоді відрізки OA й OB рівні як радіуси, отже, трикутник AOB рівнобедрений. Звідси $\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ$. Отримуємо суперечність: у трикутнику AOB є два прямих кути. Отже, пряма a є дотичною до кола. ▲

Наслідок. Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Доведіть цей наслідок самостійно.

🔑 **Задача.** Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

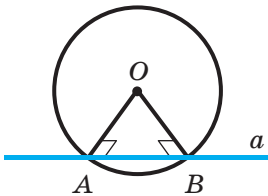


Рис. 293

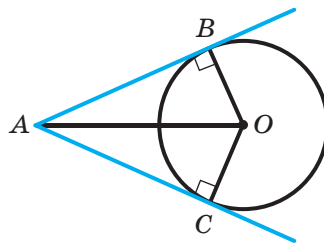
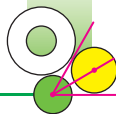


Рис. 294

Розв'язання. На рисунку 294 зображено коло із центром O . Прямі AB і AC — дотичні, B і C — точки дотику. Треба довести, що $AB = AC$.

Проведемо радіуси OB і OC у точки дотику. За властивістю дотичної (теорема 20.3) $OB \perp AB$ і $OC \perp AC$. У прямокутних



трикутниках AOB і AOC катети OB і OC рівні як радіуси одного кола, AO — спільна гіпотенуза. Отже, трикутники AOB і AOC рівні за гіпотенузою та катетом. Звідси $AB = AC$. ●

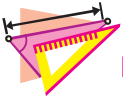
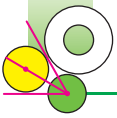


1. Як ділить хорду діаметр, що перпендикулярний до неї?
2. Чому дорівнює кут між хордою, відмінною від діаметра, і діаметром, який ділить цю хорду навпіл?
3. Опишіть усі можливі випадки взаємного розміщення прямої та кола.
4. Яку пряму називають дотичною до кола?
5. Яку властивість має радіус, проведений у точку дотику прямої та кола?
6. Сформулюйте ознаку дотичної до кола.
7. Яку властивість мають дотичні, проведені до кола через одну точку?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

- 507.° Накресліть коло із центром O , проведіть хорду AB . Користуючись косинцем, поділіть цю хорду навпіл.
- 508.° Накресліть коло із центром O , проведіть хорду CD . Користуючись лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, перпендикулярний до хорди CD .
- 509.° Накресліть коло довільного радіуса, позначте на ньому точки A і B . Користуючись лінійкою та косинцем, проведіть прямі, які дотикаються до кола в точках A і B .
- 510.° Проведіть пряму a та позначте на ній точку M . Користуючись косинцем, лінійкою та циркулем, побудуйте коло радіуса 3 см, яке дотикалося б до прямої a в точці M . Скільки таких кіл можна побудувати?



ВПРАВИ

511.^o На рисунку 295 точка O — центр кола, діаметр CD перпендикулярний до хорди AB . Доведіть, що $\angle AOD = \angle BOD$.

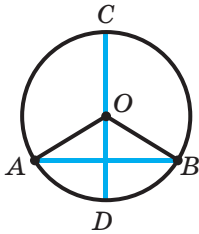


Рис. 295

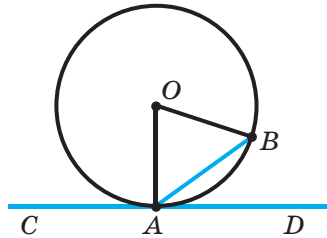
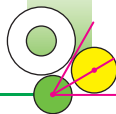


Рис. 296

- 🔑 512.^o Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.
- 🔑 513.^o Доведіть, що коли хорди кола рівновіддалені від його центра, то вони рівні.
- 514.^o Чи можна стверджувати, що пряма, перпендикулярна до радіуса кола, дотикається до цього кола?
- 515.^o Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A , відрізок AB — хорда кола, $\angle BAD = 35^\circ$ (рис. 296). Знайдіть кут AOB .
- 516.^o Пряма CD дотикається до кола із центром O в точці A , відрізок AB — хорда кола, $\angle AOB = 80^\circ$ (рис. 296). Знайдіть кут BAC .
- 517.^o Дано коло, діаметр якого дорівнює 6 см. Пряма a віддалена від його центра: 1) на 2 см; 2) на 3 см; 3) на 6 см. У якому випадку пряма a є дотичною до кола?
- 518.^o У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$. Доведіть, що:
1) пряма BC є дотичною до кола із центром A , яке проходить через точку C ;
2) пряма AB не є дотичною до кола із центром C , яке проходить через точку A .
- 🔑 519.^o Доведіть, що діаметр кола більший за будь-яку хорду, відмінну від діаметра.



- 520.* У колі із центром O через середину радіуса проведено хорду AB , перпендикулярну до нього. Доведіть, що $\angle AOB = 120^\circ$.
- 521.* Знайдіть кут між радіусами OA й OB кола, якщо відстань від центра O кола до хорди AB у 2 рази менша від: 1) довжини хорди AB ; 2) радіуса кола.
- 522.* У колі проведено діаметр AB та хорди AC і CD так, що $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30^\circ$, $AB \perp CD$. Знайдіть довжину хорди CD .
- 523.* Через точку M до кола із центром O проведено дотичні MA і MB , A і B — точки дотику, $\angle OAB = 20^\circ$. Знайдіть кут AMB .
- 524.* Через кінці хорди AB , яка дорівнює радіусу кола, проведено дві дотичні, що перетинаються в точці C . Знайдіть кут ACB .
- 525.* Через точку C кола із центром O проведено дотичну до цього кола, AB — діаметр кола. Із точки A на дотичну опущено перпендикуляр AD . Доведіть, що промінь AC — бісектриса кута BAD .
- 526.* Пряма AC дотикається до кола із центром O в точці A (рис. 297). Доведіть, що кут BAC у 2 рази менший від кута AOB .
- 527.* Відрізки AB і BC — відповідно хорда й діаметр кола, $\angle ABC = 30^\circ$. Через точку A проведено дотичну до кола, яка перетинає пряму BC у точці D . Доведіть, що трикутник ABD рівнобедрений.

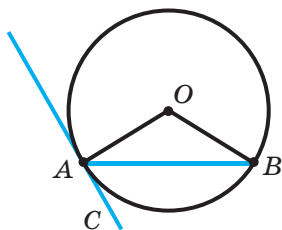


Рис. 297

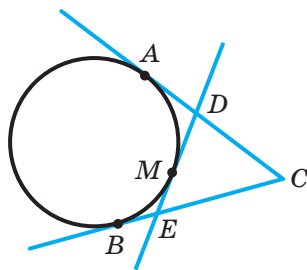
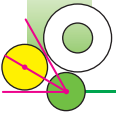



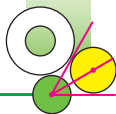
Рис. 298



- 528.* Відомо, що діаметр AB ділить хорду CD навпіл, але не перпендикулярний до неї. Доведіть, що CD теж діаметр.
- 529.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої в даній точці.
- 530.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до обох сторін даного кута.
- 531.** Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до даної прямої.
- 532.** Прямі, які дотикаються до кола із центром O в точках A і B , перетинаються в точці K , $\angle AKB = 120^\circ$. Доведіть, що $AK + BK = OK$.
-  533.** Коло дотикається до сторони AB трикутника ABC у точці M і дотикається до продовжень двох інших сторін. Доведіть, що сума довжин відрізків BC і BM дорівнює половині периметра трикутника ABC .
- 534.** Через точку C проведено дотичні AC і BC до кола, A і B — точки дотику (рис. 298). На колі взято довільну точку M , що лежить в одній півплощині з точкою C відносно прямої AB , і через неї проведено дотичну до кола, яка перетинає прямі AC і BC у точках D і E відповідно. Доведіть, що периметр трикутника DEC не залежить від вибору точки M .

**ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ**

535. Доведіть, що середина M відрізка, кінці якого належать двом паралельним прямим, є серединою будь-якого відрізка, який проходить через точку M і кінці якого належать цим прямим.
536. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Точку M вибрано так, що трикутник AMB рівнобедрений з основою AB . Доведіть, що трикутник CMD є також рівнобедреним з основою CD .



537. На стороні MK трикутника MPK позначено точки E і F так, що точка E лежить між точками M і F , $ME = EP$, $PF = FK$. Знайдіть кут M , якщо $\angle EPF = 92^\circ$, $\angle K = 26^\circ$.
538. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису BM . Із точки M на сторону BC опущено перпендикуляр MK . Виявилось, що $\angle ABM = \angle KMC$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

539. Установіть закономірність форм фігур, зображених на рисунку 299. Яку фігуру треба поставити наступною?



Рис. 299

21. Описане та вписане кола трикутника

Означення. Коло називають **описаним** навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

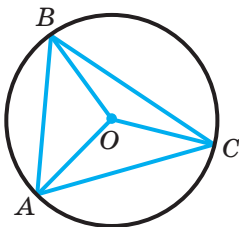
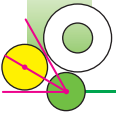


Рис. 300

На рисунку 300 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що **трикутник вписаний у коло**.

На рисунку 300 точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Відрізки OA , OB і OC — радіуси цього кола, тому $OA = OB = OC$. Отже, *центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин*.



Теорема 21.1. *Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.*

Доведення. ☺ Для доведення достатньо показати, що для будь-якого трикутника ABC існує точка O , рівновіддалена від усіх його вершин. Тоді точка O буде центром описаного кола, а відрізки OA , OB і OC — його радіусами.

На рисунку 301 зображено довільний трикутник ABC . Проведемо серединні перпендикуляри k і l сторін AB і AC відповідно. Нехай O — точка перетину цих прямих. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру k , то $OA = OB$. Оскільки точка O належить серединному перпендикуляру l , то $OA = OC$. Отже, $OA = OB = OC$, тобто точка O рівновіддалена від усіх вершин трикутника. ▲

Зауважимо, що навколо трикутника можна описати тільки одне коло. Це випливає з того, що серединні перпендикуляри k і l (рис. 301) мають тільки одну точку перетину. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від усіх вершин трикутника.

Наслідок 1. *Три серединних перпендикулярів сторін трикутника перетинаються в одній точці.*

Наслідок 2. *Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.*

Означення. Коло називають **вписаним** у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 302 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

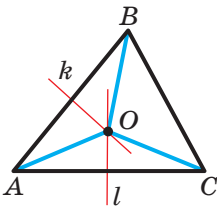


Рис. 301

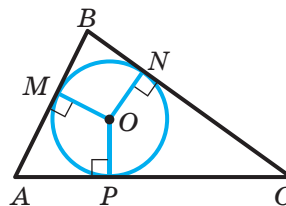
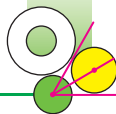


Рис. 302



На рисунку 302 точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC , відрізки OM , ON , OP — радіуси, проведені в точки дотику, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Оскільки $OM = ON = OP$, то *центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін*.

Теорема 21.2. *У будь-який трикутник можна вписати коло.*

Доведення. ☺ На рисунку 303 зображено довільний трикутник ABC . Проведемо бісектриси кутів A і B , позначимо точку O їхнього перетину. З точки O опустимо перпендикуляри OM , ON і OP відповідно на сторони AB , BC і CA трикутника ABC . Оскільки

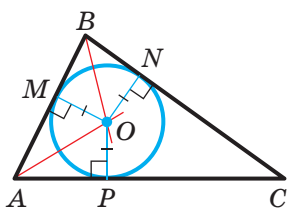


Рис. 303

точка O належить бісектрисі кута A , то за теоремою про бісектрису кута (теорема 19.2) отримуємо, що $OM = OP$. Аналогічно, оскільки точка O належить бісектрисі кута B , то $OM = ON$. Нехай $OM = r$. Тоді $OM = ON = OP = r$. Таким чином, точка O віддалена від кожної

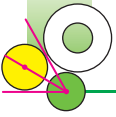
сторони трикутника ABC на одну й ту саму відстань r . Тоді за наслідком з ознаки дотичної до кола (наслідок з теореми 20.4) точка O є центром кола радіуса r , яке дотикається до сторін AB , BC і CA . ▲

Зауважимо, що в трикутник можна вписати тільки одне коло. Це випливає з того, що бісектриси кутів A і B (рис. 303) перетинаються тільки в одній точці. Отже, існує тільки одна точка, рівновіддалена від сторін трикутника.

Наслідок 1. *Бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці.*

Наслідок 2. *Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.*

🔑 **Задача.** Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначають за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де r — радіус вписаного кола, a і b — катети, c — гіпотенуза.



Розв'язання. У трикутнику ABC маємо: $\angle ACB = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписаного кола, M , E і K — точки дотику вписаного кола до сторін BC , AC і AB відповідно (рис. 304).

Відрізок OM — радіус кола, проведений у точку дотику. Тоді $OM \perp BC$.

Оскільки точка O — центр вписаного кола, то промінь CO — бісектриса кута ACB , отже, $\angle OCM = 45^\circ$. Тоді трикутник CMO рівнобедрений прямокутний. Звідси $CM = OM = r$.

Використовуючи властивість відрізків дотичних, проведених до кола через одну точку, отримуємо: $CE = CM$. Оскільки $CM = r$, то $CE = r$. Тоді $AK = AE = b - r$; $BK = BM = a - r$.

Оскільки $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$. Звідси $2r = a + b - c$; $r = \frac{a+b-c}{2}$. ●

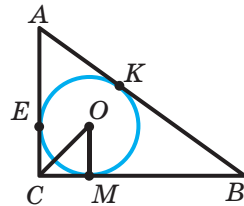


Рис. 304



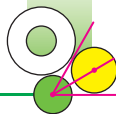
1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Який трикутник називають вписаним у коло?
3. Навколо якого трикутника можна описати коло?
4. Яка точка є центром кола, описаного навколо трикутника?
5. Яке коло називають вписаним у трикутник?
6. Який трикутник називають описаним навколо кола?
7. У який трикутник можна вписати коло?
8. Яка точка є центром кола, вписаного в трикутник?



ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

540.° Накресліть різносторонній гострокутний трикутник.

- 1) Користуючись лінійкою зі шкалою та косинцем, знайдіть центр кола, описаного навколо даного трикутника.
- 2) Опишіть навколо трикутника коло.



Виконайте завдання 1 і 2 для рівносторонніх прямокутного й тупокутного трикутників.

541.° Накресліть:

- 1) рівнобедрений гострокутний трикутник;
- 2) рівнобедрений тупокутний трикутник.

Виконайте завдання 1 і 2 із вправи 540.

542.° Перерисуйте в зошит рисунок 305. Проведіть через точки A , B , C коло, користуючись лінійкою зі шкалою, косинцем і циркулем.

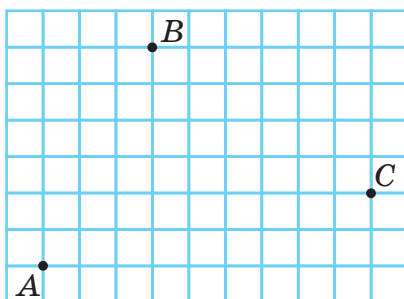
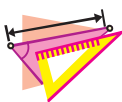


Рис. 305

543.° Накресліть рівносторонній трикутник.

- 1) Користуючись лінійкою та транспортиром, знайдіть центр кола, вписаного в даний трикутник.
- 2) Користуючись косинцем, знайдіть точки дотику вписаного кола до сторін трикутника.
- 3) Впишіть у даний трикутник коло.

544.° Накресліть рівнобедрений трикутник. Виконайте завдання 1, 2 і 3 із вправи 543.



ВПРАВИ

545.° Доведіть, що центр описаного кола рівнобедреного трикутника належить прямій, яка містить медіану, проведену до його основи.

546.° Доведіть, що центр вписаного кола рівнобедреного трикутника належить висоті, проведеній до його основи.

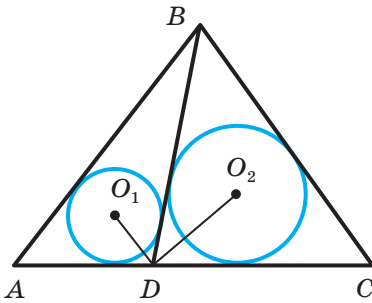
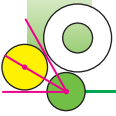


Рис. 306

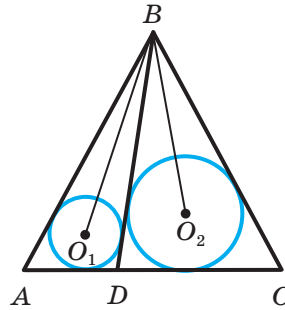


Рис. 307

- 547.° Доведіть, що коли центр вписаного кола трикутника належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.
- 548.° Доведіть, що центр описаного кола рівностороннього трикутника є точкою перетину його бісектрис.
- 549.° На рисунку 306 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно. Доведіть, що кут O_1DO_2 прямий.
- 550.° На рисунку 307 у трикутники ABD і CBD вписано кола із центрами O_1 і O_2 відповідно, $\angle ABC = 50^\circ$. Знайдіть кут O_1BO_2 .
- 551.° Через центр O кола, описаного навколо трикутника ABC , проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони AC і перетинає сторону AB у точці M . Доведіть, що $AM = MC$.
- 552.° Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 308), дотикається до його сторін у точках M , K і E , $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC .
- 553.° Коло, вписане в трикутник ABC (рис. 308), дотикається до його сторін у точках M , K і E , $AB = 13$ см, $BC = 8$ см, $BK = 3$ см. Знайдіть сторону AC .
- 554.° Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті, то цей трикутник рівнобедрений.

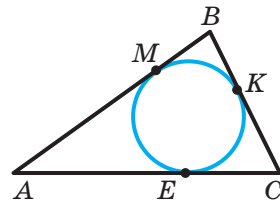
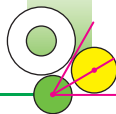


Рис. 308



- 555.*** Доведіть, що коли центр кола, вписаного в трикутник, належить його медіані, то цей трикутник рівнобедрений.
- 556.*** Доведіть, що коли центри вписаного й описаного кіл трикутника збігаються, то цей трикутник рівносторонній.
- 557.*** Точка дотику вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить його бічну сторону у відношенні $7 : 5$, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть сторону трикутника, якщо його периметр дорівнює 68 см.
- 558.*** Периметр трикутника ABC , описаного навколо кола, дорівнює 52 см. Точка дотику кола до сторони AB ділить цю сторону у відношенні $2 : 3$, рахуючи від вершини A . Точка дотику до сторони BC віддалена від вершини C на 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
- 559.*** У трикутник з кутами 30° , 70° і 80° вписано коло. Знайдіть кути трикутника, вершини якого є точками дотику вписаного кола до сторін даного трикутника.
- 560.*** Коло, вписане в рівнобедрений трикутник ABC , дотикається до його бічних сторін AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $MN \parallel AC$.
- 561.*** Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник прямокутний.
- 562.**** У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторони AB у точці M , $BC = a$. Доведіть, що $AM = p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC .
- 563.**** До кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a , проведено дотичну, яка перетинає дві сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який ця дотична відтинає від даного.
- 564.*** У рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) з основою 10 см вписано коло. До цього кола проведено три дотичні, які відтинають від даного трикутника трикутники ADK , BEF і CMN . Сума периметрів утворених трикутників дорівнює 42 см. Чому дорівнює бічна сторона даного трикутника?

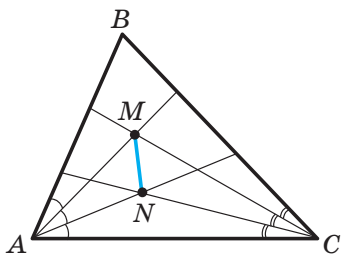


Рис. 309

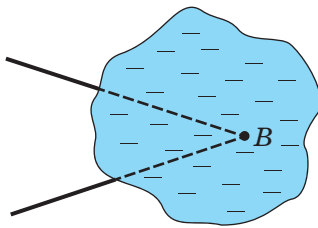


Рис. 310

- 565.* У трикутнику ABC відрізок BD — медіана, $AB = 7$ см, $BC = 8$ см. У трикутники ABD і BDC вписали кола. Знайдіть відстань між точками дотику цих кіл до відрізка BD .
- 566.* Кожний із кутів BAC і ACB трикутника ABC поділено на три рівні частини (рис. 309). Доведіть, що $\angle AMN = \angle CMN$.
- 567.* Нехай вершина кута B недоступна (рис. 310). За допомогою транспортира та лінійки без поділок побудуйте пряму, яка містить бісектрису кута B .
- 568.* Точки F і O — центри вписаного й описаного кіл рівнобедреного трикутника ABC відповідно (рис. 311). Вони розташовані на однаковій відстані від його основи AC . Знайдіть кути трикутника ABC .

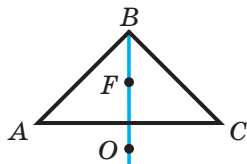
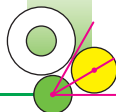


Рис. 311



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

569. Бісектриса кута ABC утворює з його стороною кут, що дорівнює куту, суміжному з кутом ABC . Знайдіть кут ABC .
570. У рівнобедреному трикутнику з вершини одного кута при основі проведено висоту трикутника, а з вершини другого кута при основі — бісектрису трикутника. Один із кутів, утворених при перетині проведених бісектриси й висоти, дорівнює 64° . Знайдіть кути даного трикутника.



571. На рисунку 312 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см. Бісектриса кута BAD перетинає відрізок BC у точці K . Знайдіть відрізки BK і KC .
572. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, AM і CK — медіани цього трикутника. Доведіть, що $MK \parallel AC$.

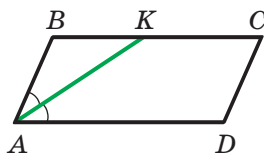


Рис. 312



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

573. У квадраті $ABCD$ вирізали заштриховану фігуру (рис. 313). Розділіть частину квадрата, яка залишилася, на чотири рівні фігури.

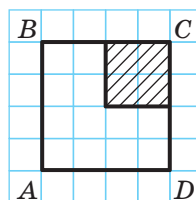


Рис. 313

22. Задачі на побудову¹

За допомогою лінійки з поділками, циркуля, косинця, транспортира, лекал (рис. 314) вам неодноразово доводилося виконувати різні геометричні побудови.

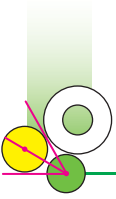
А чи можна задовольнитися меншою кількістю креслярських інструментів? Виявляється, що в багатьох випадках достатньо використовувати тільки *циркуль і лінійку без поділок*. Наприклад, щоби провести бісектрису кута, зовсім не обов'язково мати транспортер, а поділити відрізок навпіл можна й тоді, коли на лінійку не нанесено шкалу.



Рис. 314

А чи варто в наш час, коли створено найточніші прилади й досконалі комп'ютерні програми, які дають можливість виконувати найскладніші вимірювання та побудови,

¹ Матеріал, поданий у цьому пункті, є необов'язковим для вивчення.



задовольнятися такими мізерними засобами, як циркуль і лінійка? На практиці, звісно, ні. Тому, наприклад, конструктори, будівельники, архітектори, дизайнери не обмежують себе у виборі інструментів.


Однак при побудові фігур у геометрії домовилися дотримуватися таких правил:

- 1) усі побудови виконують тільки за допомогою циркуля та лінійки без поділок;
- 2) за допомогою лінійки можна через задану точку провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB ;
- 3) за допомогою циркуля можна побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку.

Отже, домовимося, що коли в задачі потрібно побудувати якусь фігуру, то побудову виконують за описаними вище правилами.

Розв'язати задачу на побудову — це означає скласти план (*алгоритм*) побудови фігури; реалізувати план, виконавши побудову; довести, що отримана фігура є шуканою.

Розглянемо основні задачі на побудову.

 **Задача 1.** Побудуйте кут, що дорівнює даному, одна зі сторін якого є даним променем.

Розв'язання. На рисунку 315 зображено кут A та промінь OK . Треба побудувати кут, що дорівнює куту A , однією зі сторін якого є промінь OK .

Проведемо коло довільного радіуса r із центром у точці A . Точки перетину цього кола зі сторонами кута A позначимо B і C (рис. 316). Тоді $AB = AC = r$.

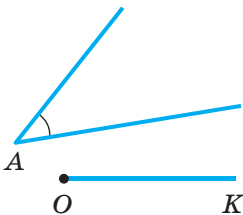


Рис. 315

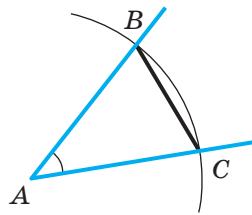


Рис. 316

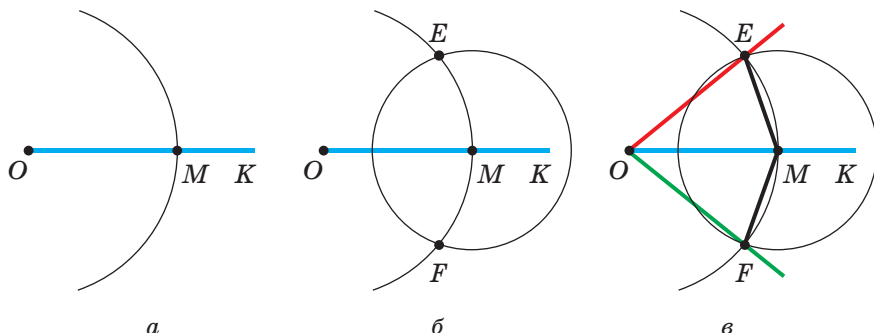
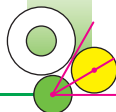


Рис. 317

Проведемо коло радіуса r із центром у точці O . Нехай воно перетинає промінь OK у точці M (рис. 317, *a*). Потім проведемо коло радіуса BC із центром у точці M . Нехай кола із центрами O і M перетинаються в точках E і F (рис. 317, *б*). Проведемо промені OE та OF (рис. 317, *в*).

Покажемо, що кожний із кутів EOM і FOM шуканий. Доведемо, наприклад, що $\angle EOM = \angle BAC$.

Розглянемо трикутники ABC (рис. 316) і OEM (рис. 317, *в*). Маємо: $AB = OE = r = AC = OM$. Крім того, за побудовою $EM = BC$. Отже, трикутники ABC і OEM рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогічно можна показати, що $\angle BAC = \angle FOM$. ●

Ми побудували два кути EOM і FOM , які задовольняють умову задачі. Ці кути рівні. У таких випадках вважають, що задача на побудову має один розв'язок.

🔑 **Задача 2.** Побудуйте серединний перпендикуляр даного відрізка.

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (рис. 318, *a*). Проведемо два кола із центрами A і B та радіусом AB . Точки перетину цих кіл позначимо M і N (рис. 318, *б*). Проведемо пряму MN (рис. 318, *в*). Доведемо, що пряма MN є шуканою.

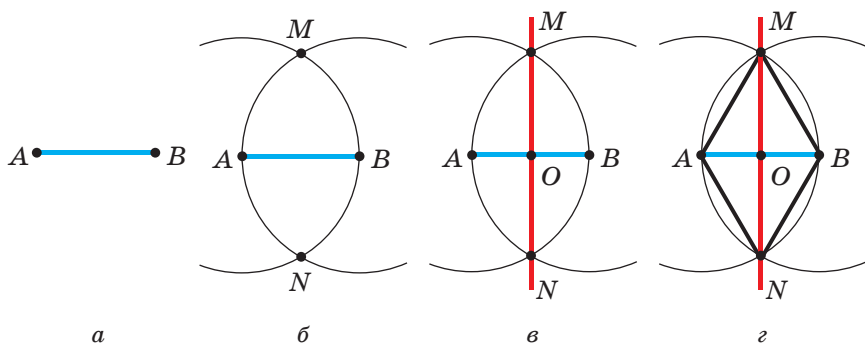


Рис. 318

З побудови випливає, що $MA = MB = AB$ і $NA = NB = AB$ (рис. 318, *г*). Отже, точки M і N належать серединному перпендикуляру відрізка AB . Тоді пряма MN є серединним перпендикуляром відрізка AB . ●

Зауваження. Оскільки пряма MN перетинає відрізок AB у його середині, у точці O , то тим самим розв'язано таку задачу.

🔑 **Задача 3.** Поділіть даний відрізок навпіл.

🔑 **Задача 4.** Дано пряму та точку, яка їй не належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй не належить. Проведемо коло із центром у точці A так, щоб воно перетинало пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 319).

Оскільки $AM = AN$, то точка A належить серединному перпендикуляру відрізка MN . Побудувавши цей серединний перпендикуляр (див. задачу 2), ми тим самим розв'яжемо задачу. ●

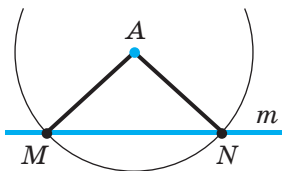


Рис. 319

🔑 **Задача 5.** Дано пряму та точку, яка їй належить. Через цю точку проведіть пряму, перпендикулярну до даної.

Розв'язання. Нехай m — дана пряма, A — точка, яка їй належить. Проведемо коло довільного радіуса із центром

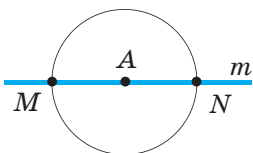
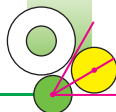


Рис. 320

у точці A . Воно перетинає пряму m у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 320).

Оскільки $AM = AN$, то ми звели задачу до побудови серединного перпендикуляра відрізка MN . ●

🔑 **Задача 6.** Побудуйте бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай A — даний кут. Проведемо коло довільного радіуса із центром у точці A . Це коло перетинає сторони кута у двох точках. Позначимо ці точки M і N (рис. 321, *а*). Тим самим радіусом проведемо два кола із центрами M і N . Нехай ці кола перетинаються в точках A і K (рис. 321, *б*). Проведемо промінь AK (рис. 321, *в*).

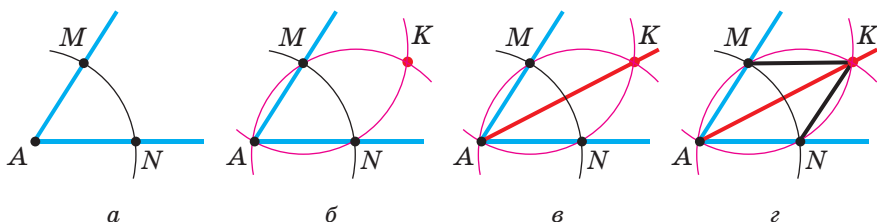


Рис. 321

Доведемо, що промінь AK — шукана бісектриса.

Дійсно, трикутники AMK і ANK (рис. 321, *г*) рівні за трьома сторонами, тобто за третьою ознакою рівності трикутників. Отже, $\angle MAK = \angle NAK$. ●

🔑 **Задача 7.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та катетом.

Розв'язання. Нехай дано два відрізки завдовжки c і b , причому $b < c$ (рис. 322, *а*). Оскільки гіпотенуза більша за катет, то гіпотенуза шуканого трикутника дорівнює більшому з даних відрізків, а катет — меншому. Отже, треба побудувати прямокутний трикутник ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$, $AB = c$, $AC = b$.

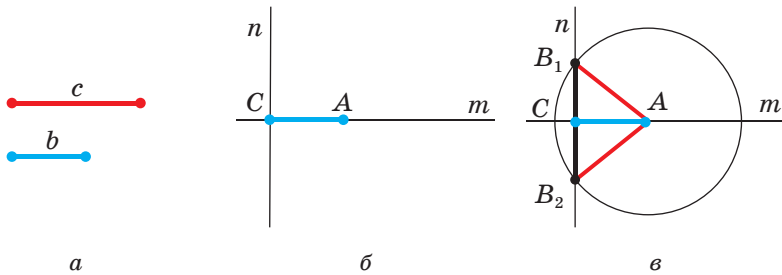


Рис. 322

Проведемо дві перпендикулярні прямі m і n . Нехай C — точка їхнього перетину. На прямій m відкладемо відрізок CA , який дорівнює даному катету b (рис. 322, б). Проведемо коло із центром у точці A радіусом, який дорівнює даній гіпотенузі c . Нехай це коло перетне пряму n у двох точках B_1 і B_2 (рис. 322, в). Кожний із трикутників ACB_1 і ACB_2 — шуканий.

Оскільки трикутники ACB_1 і ACB_2 рівні, то задача має єдиний розв'язок. ●

Задача 8. Побудуйте трикутник за стороною та висотами, проведеними до двох інших сторін.

Розв'язання. На рисунку 323 зображено трикутник ABC , відрізки AA_1 і CC_1 — його висоти. Якщо відомо відрізки AC , AA_1 і CC_1 , то можна побудувати прямокутні трикутники AA_1C і CC_1A за гіпотенузою та катетом (див. задачу 7).

Наведені міркування називають **аналізом задачі на побудову**. Він підказує план побудови.

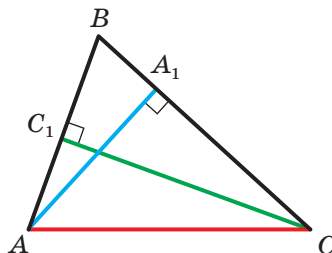


Рис. 323

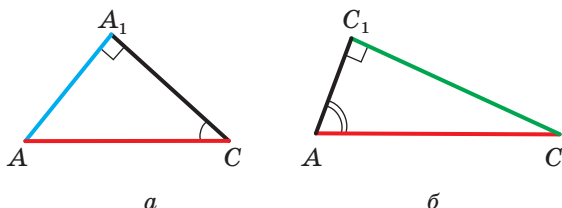
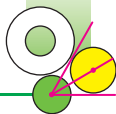


Рис. 324

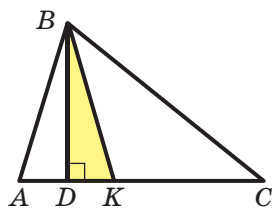


Рис. 325

Побудуємо прямокутний трикутник AA_1C , у якому гіпотенуза AC дорівнює даній стороні, а катет AA_1 — один із даних висот (рис. 324, *a*). У побудованому трикутнику кут ACA_1 дорівнює одному з кутів, прилеглих до даної сторони шуканого трикутника. За допомогою аналогічної побудови можна отримати другий прилеглий до даної сторони кут. На рисунку 324, *б* це кут C_1AC .

Тепер залишилося побудувати трикутник ABC за стороною AC і двома прилеглими до неї кутами. Виконайте цю побудову самостійно. ●

Задача 9. Побудуйте трикутник за кутом, висотою та бісектрисою, проведеними з вершини цього кута.

Розв'язання. Проведемо аналіз задачі на побудову. На рисунку 325 зображено трикутник ABC , у якому відрізок BD — висота, відрізок BK — бісектриса.

Якщо відомо довжини відрізків BD і BK , то прямокутний трикутник BDK можна побудувати за гіпотенузою та катетом. Також зауважимо, що коли відомо кут ABC , то можна побудувати кути ABK і KBC , кожний з яких дорівнює $\frac{1}{2} \angle ABC$. Звідси отримуємо план побудови.

Будуємо прямокутний трикутник BDK , у якому гіпотенуза BK дорівнює даній бісектрисі, а катет BD — даній висоті (рис. 326). Будуємо два кути, кожний з яких дорівнює половині даного, так, щоби промінь BK був їхньою спільною стороною. На рисунку 326 це кути ABK і KBC . Трикутник ABC — шуканий. ●

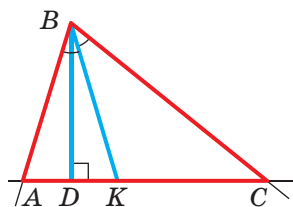
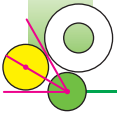
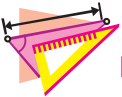


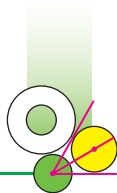
Рис. 326



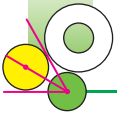
1. За допомогою яких інструментів виконують геометричні побудови? Які побудови можна ними виконувати?
2. Що означає розв'язати задачу на побудову?

**ВПРАВИ**

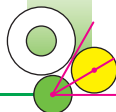
- 574.° Накресліть: 1) гострий кут; 2) тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює накресленому.
- 575.° Накресліть гострий кут ABC і проведіть промінь DK . Побудуйте кут MDK такий, що $\angle MDK = 2 \angle ABC$.
- 576.° Поділіть даний відрізок на чотири рівні частини.
- 577.° Накресліть довільний кут. Поділіть його на чотири рівні частини.
- 578.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 75° ; 4) 120° .
- 579.° Побудуйте кут, який дорівнює: 1) 30° ; 2) $22^\circ 30'$; 3) 15° .
- 580.° Накресліть: 1) гострокутний трикутник; 2) тупокутний трикутник. Побудуйте всі висоти цього трикутника.
- 581.° Накресліть трикутник ABC . Побудуйте його: 1) висоту AM ; 2) медіану BD ; 3) бісектрису CK .
- 582.° Через дану точку, яка не належить даній прямій, проведіть пряму, паралельну даній.
- 583.° Побудуйте трикутник:
1) за двома сторонами та кутом між ними;
2) за стороною та двома прилеглими кутами.
- 584.° Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої в даній точці.
- 585.° Через дану точку, що належить куту, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.
- 586.° Побудуйте дотичну до кола, яка проходить через дану точку кола.
- 587.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.



- 588.° Дано кут, який дорівнює 30° . Побудуйте коло заданого радіуса так, щоби центр кола належав одній із сторін даного кута й коло дотикалося до другої сторони кута.
- 589.° Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.
- 590.° Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за двома катетами;
 - 2) за гіпотенузою та гострим кутом;
 - 3) за катетом і прилеглим гострим кутом.
- 591.° Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і протилежним гострим кутом.
- 592.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:
- 1) за бічною стороною та кутом при вершині;
 - 2) за висотою, опущеною на основу, та кутом при вершині;
 - 3) за основою та медіаною, проведеною до основи;
 - 4) за основою та висотою, проведеною до бічної сторони.
- 593.° Побудуйте рівнобедрений трикутник:
- 1) за основою та кутом при основі;
 - 2) за бічною стороною та кутом при основі;
 - 3) за бічною стороною та висотою, проведеною до основи.
- 594.° Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:
- 1) за катетом;
 - 2) за гіпотенузою.
- 595.° Побудуйте коло, центром якого є дана точка на стороні даного гострого кута та яке відтинає на другій стороні кута відрізок даної довжини.
- 596.° Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?
- 597.° Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за гострим кутом і бісектрисою цього кута;
 - 2) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
- 598.° Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за катетом і медіаною, проведеною до другого катета;
 - 2) за гострим кутом і висотою, проведеною з вершини прямого кута.



- 599.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом вписаного кола.
- 600.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.
- 601.** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом між даною стороною та медіаною.
- 602.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї гострим кутом і висотою, проведеною до даної сторони.
- 603.** Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?
- 604.** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною та висотою, проведеними з одного й того самого кінця даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?
- 605.** Побудуйте трикутник за висотою та двома кутами, які ця висота утворює зі сторонами трикутника, що мають з висотою спільну вершину. Скільки розв'язків може мати задача?
- 606.** Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. Скільки розв'язків може мати задача?
- 607.** Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?
- 608.** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і медіаною, проведеною до даної сторони. Скільки розв'язків може мати задача?
- 609.** Побудуйте трикутник за кутом і висотами, проведеними з вершин двох інших кутів.
- 610.** Побудуйте трикутник за двома висотами та кутом, з вершини якого проведено одну з даних висот. Скільки розв'язків може мати задача?
- 611.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.



- 612.**** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом вписаного кола.
- 613.**** Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола та відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.
- 614.**** Побудуйте трикутник за стороною та проведеними до цієї сторони висотою та медіаною.
- 615.**** Побудуйте трикутник, якщо дано три точки, у яких вписане коло дотикається до його сторін.
- 616.*** Як поділити на три рівні частини кут, який дорівнює 54° ?



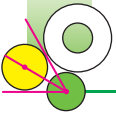
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 617.** У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, відрізки AE і CF — бісектриси цього трикутника. Доведіть, що $EF \parallel AC$.
- 618.** Визначте кути трикутника ABC , якщо:
- 1) $\angle A + \angle B = 110^\circ$, $\angle A + \angle C = 85^\circ$;
 - 2) $\angle C - \angle A = 29^\circ$, $\angle A + \angle C = 121^\circ$.
- 619.** Серединний перпендикуляр гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC перетинає катет BC у точці M . Відомо, що $\angle MAC : \angle MAB = 8 : 5$. Знайдіть гострі кути трикутника ABC .
- 620.** Визначте вид трикутника, у якого один із його зовнішніх кутів більший за один із кутів трикутника, не суміжних з ним:
- 1) на 60° , а за другий — на 40° ;
 - 2) на 25° , а за другий — на 35° .



СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ


- 621.** На аркуші паперу накреслили рівносторонній трикутник і повністю накрили його двома іншими рівносторонніми трикутниками різних розмірів. Доведіть, що для покриття вистачило б одного із цих трикутників.



23. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову¹

Відомо, що, змішуючи синій та жовтий кольори, отримують зелений.

Нехай на площині треба знайти точки, що мають якісь дві властивості одночасно. Якщо точки, які мають першу властивість, зафарбувати синім кольором, а точки, які мають другу властивість, — жовтим, то зрозуміло, що зелені точки матимуть одразу дві властивості. У цьому й полягає ідея методу ГМТ. Розв'яжемо за допомогою цього методу кілька задач.

 **Задача 1.** Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a , b , c (рис. 327). Треба побудувати трикутник ABC , у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок BC , який дорівнює a (рис. 328). Задача звелася до побудови третьої вершини трикутника, точки A .

Скористаємося тим, що точка A має одразу дві властивості:

1) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки B на відстань c , тобто колу радіуса c із центром у точці B (на рисунку 328 це «жовте коло»);

2) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки C на відстань b , тобто колу радіуса b із центром у точці C (на рисунку 328 це «синє коло»).

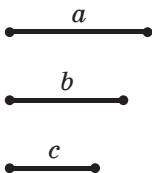


Рис. 327

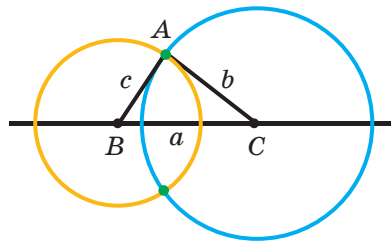
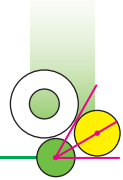


Рис. 328

¹ Матеріал, поданий у цьому пункті, є необов'язковим для вивчення.



За точку A можна взяти будь-яку з двох «зелених точок», що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. ●

З описаної побудови випливає, що *коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.*

Задача 2. Побудуйте фігуру, усі точки якої належать даному куту, рівновіддалені від його сторін і знаходяться на заданій відстані a від його вершини.

Розв'язання. Шукані точки належать одразу двом геометричним місцям точок: бісектрисі даного кута та колу із центром у вершині кута й радіусом, який дорівнює a .

Побудуємо бісектрису кута й указане коло (рис. 329). Їхнім перетином є шукана точка X . ●

Задача 3. Побудуйте центр кола даного радіуса R , яке проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a .

Розв'язання. Оскільки коло дотикається до прямої a , то його центр знаходиться на відстані R від цієї прямої. Геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на дану відстань, є дві паралельні прямі (див. вправу 498). Отже, центр кола треба шукати на «жовтих прямих» (рис. 330).

Геометричним місцем точок, які є центрами кіл радіуса R , що проходять через точку M , є коло радіуса R із центром у точці M (на рисунку 331 це «синє коло»). Тому за центр шуканого кола можна взяти будь-яку з точок перетину «синього кола» з однією із «жовтих прямих» (рис. 331).

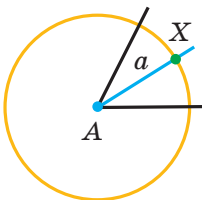


Рис. 329

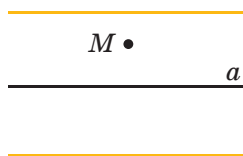


Рис. 330

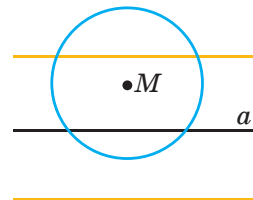
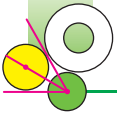


Рис. 331



Побудову для випадку, коли дана точка належить даній прямій, розгляньте самостійно. ●

Задача 4. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо коло даного радіуса й проведемо хорду AB , яка дорівнює стороні шуканого трикутника. Тоді кінці хорди є двома вершинами шуканого трикутника. Зрозуміло, що третя вершина належить одночасно побудованому колу («жовте коло») та колу із центром у точці O , яка є серединою хорди AB , і радіусом, який дорівнює даній медіані («синє коло»). Кожний із трикутників ABC_1 і ABC_2 (рис. 332) є шуканим. Оскільки ці трикутники рівні, то задача має єдиний розв'язок. ●

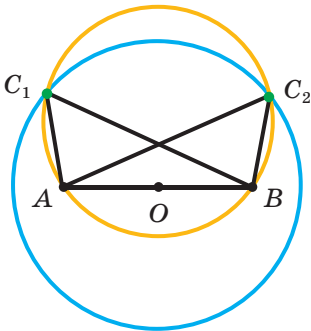


Рис. 332

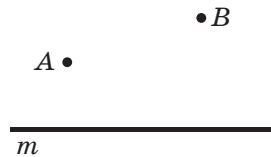
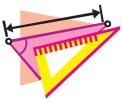
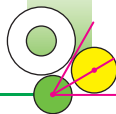


Рис. 333

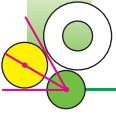
**ВПРАВИ**

622.° Дано пряму m і точки A та B поза нею (рис. 333). Побудуйте на прямій m точку, рівновіддалену від точок A і B .

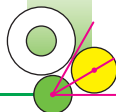
623.° Точки A і B належать прямій m . Побудуйте точку, віддалену від прямої m на відстань a та рівновіддалену від точок A і B . Скільки розв'язків може мати задача?



- 624.° Точки B і C належать різним сторонам кута A , причому $AB \neq AC$. Побудуйте точку M , яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $MB = MC$.
- 625.° Точки B і C належать різним сторонам кута A . Побудуйте точку D , яка належить куту, рівновіддалена від його сторін і така, що $DC = BC$. Скільки розв'язків може мати задача?
- 626.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та бічною стороною.
- 627.° Для даного кола побудуйте точку, яка є його центром.
- 628.° Побудуйте коло даного радіуса, центр якого належить даній прямій, так, щоб це коло проходило через дану точку.
- 629.° Побудуйте коло даного радіуса, яке проходить через дві дані точки.
- 630.° Знайдіть усі точки, які належать даному колу та рівновіддалені від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків може мати задача?
- 631.° Дано дві прямі m і n , які перетинаються, і відрізок AB . Побудуйте на прямій m точку, яка віддалена від прямої n на відстань AB . Скільки розв'язків має задача?
- 632.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$. На катеті AC побудуйте точку D , яка віддалена від прямої AB на відстань CD .
- 633.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?
- 634.° Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з даних сторін.
- 635.° Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.
- 636.° На даному колі побудуйте точку, яка знаходиться на даній відстані від даної прямої. Скільки розв'язків може мати задача?



- 637.**** На даному колі побудуйте точку, яка рівновіддалена від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків може мати задача?
- 638.**** Між двома паралельними прямими дано точку. Побудуйте коло, яке проходить через цю точку й дотикається до даних прямих. Скільки розв'язків має задача?
- 639.**** Побудуйте коло, яке проходить через дану точку A та дотикається до даної прямої m у даній точці B .
- 640.**** Дано дві паралельні прямі та січну. Побудуйте коло, яке дотикається до цих трьох прямих.
- 641.**** Побудуйте трикутник за двома сторонами та радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?
- 642.**** Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків може мати задача?
- 643.**** Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.
- 644.*** Три прямі попарно перетинаються та не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв'язків має задача?
- 645.*** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою гіпотенузи та другого катета.
- 646.*** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та сумою катетів.
- 647.*** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою та різницею катетів.
- 648.*** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і різницею гіпотенузи та другого катета.
- 649.*** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою та різницею бічної сторони та висоти, опущеної на основу.
- 650.*** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін.
- 651.*** Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і різницею двох інших сторін.



- 652.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і різницею двох інших сторін.
- 653.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом і сумою двох інших сторін.
- 654.* Побудуйте трикутник за стороною, різницею кутів, прилеглих до цієї сторони, і сумою двох інших сторін.
- 655.* Побудуйте трикутник за периметром і двома кутами.
- 656.* Побудуйте гострокутний трикутник за периметром, одним із кутів і висотою, проведеною з вершини іншого кута.
- 657.* Побудуйте трикутник за висотою та медіаною, проведеними з однієї вершини, і радіусом описаного кола.
- 658.* Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.
- 659.* Побудуйте трикутник за стороною, висотою, проведеною до цієї сторони, і медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

660. На рисунку 334 $\angle A = 46^\circ$, $\angle ACB = 68^\circ$, $\angle DEC = 120^\circ$. Знайдіть кути трикутників EFC і DBE .
661. Через середину O сторони MK трикутника MKN проведено пряму, яка перпендикулярна до сторони MK і перетинає сторону MN у точці C . Відомо, що $MC = KN$, $\angle N = 50^\circ$. Знайдіть кут MCO .

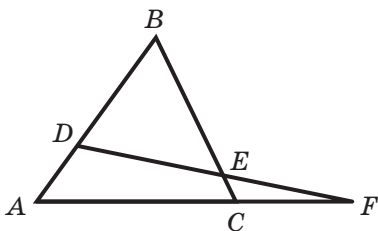


Рис. 334

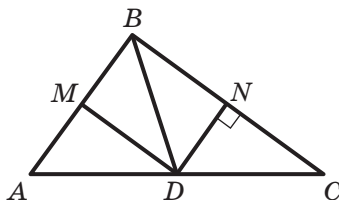
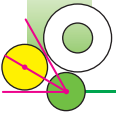


Рис. 335



- 662.** У трикутнику ABC з вершини прямого кута C проведено висоту CH і бісектрису CM . Довжина відрізка HM удвічі менша від довжини відрізка CM . Знайдіть гострі кути трикутника ABC .
- 663.** На рисунку 335 $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Знайдіть суму кутів MBN та BMD .



**СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ,
КОНСТРУЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ**

- 664.** Розріжте фігуру, зображену на рисунку 336, на три частини, які не є квадратами, так, щоб із цих частин можна було скласти квадрат.

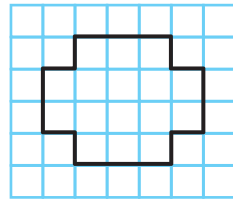


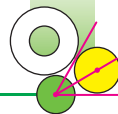
Рис. 336



З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

Уміння досягати результату, використовуючи мінімальні засоби, завжди вважалося ознакою найвищої майстерності. Мабуть, тому в Стародавній Греції значною мірою було розвинене мистецтво виконувати геометричні побудови за допомогою лише двох інструментів: дощечки з рівним краєм (лінійки) і двох загострених паличок, зв'язаних на одному кінці (циркуля). Таке обмеження у виборі інструментів історички пов'язують з давньогрецькою традицією, за якою пряму та коло вважали найгармонічнішими фігурами. Так, у своїй книзі «Начала» видатний учений Евклід описував побудови геометричних фігур, які було виконано лише циркулем і лінійкою.

Існує багато задач на побудову. З деякими з них ви вже ознайомилися. Проте є три задачі на побудову, які відіграли особливу роль у розвитку математики. Ці задачі стали знаменитими.



Задача про квадратуру круга. Побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

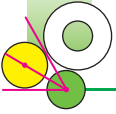
Задача про трисекцію кута (від латинських *tria* — «три» і *section* — «розрізання»). Поділити кут на три рівні частини.

Задача про подвоєння куба. Побудувати куб, об'єм якого у 2 рази більший за об'єм даного куба.

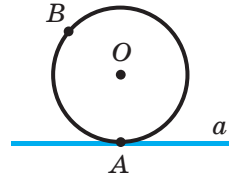
Ці задачі непокоїли людей протягом тисячоліть. Їх намагалися розв'язати й такі видатні вчені стародавніх часів, як Гіппократ Хіосський, Евдокс Кнідський, Евклід, Ератосфен, Аполлоній Пергський, Герон, Папп, Платон, Архімед, і генії Нового часу — Рене Декарт, Франсуа Вієт, Ісаак Ньютон. І лише в середині XIX ст. було доведено, що їх розв'язати неможливо, тобто неможливо виконати зазначені побудови з використанням лише циркуля та лінійки. Цей результат був отриманий засобами не геометрії, а алгебри, завдяки перекладу цих задач мовою рівнянь.

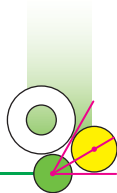
Коли ви розв'язували задачі на побудову, особливо ті, що позначені зірочкою, ви, мабуть, зазнали ускладнень, пов'язаних з обмеженістю арсеналу інструментів. Тому пропозиція ще більше звузити можливості застосовуваних приладів може здатися щонайменше несподіваною. Проте ще в X ст. персидський математик Мохаммед Абу-ль-Вефа описав розв'язання низки задач на побудову за допомогою лінійки та циркуля, розхил якого не можна змінювати. Зовсім дивовижною є теорема, опублікована в 1797 р. італійським математиком Лоренцо Маскероні (1750–1800): *будь-яку побудову, що виконується циркулем і лінійкою, можна виконати одним лише циркулем*. При цьому Маскероні обумовив таке: оскільки самим лише циркулем провести пряму неможливо, то пряму вважають побудованою, якщо побудовано які-небудь дві її точки.

У XX ст. було знайдено книгу датського вченого Георга Мора (1640–1697), у якій він також описував побудови одним лише циркулем. Тому сформульовану вище теорему називають теоремою Мора—Маскероні.

**ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ**

- Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних?
А) Безліч; Б) 2; В) 1; Г) жодної.
- Дано три точки, які лежать на одній прямій. Скільки точок містить геометричне місце точок, рівновіддалених від даних?
А) 1; Б) 2; В) безліч; Г) жодної.
- Скільки точок містить геометричне місце точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін та вершини?
А) 1; Б) 2; В) безліч; Г) жодної.
- Точка X належить колу радіуса R із центром O . Яке з поданих тверджень є неправильним?
А) $OX \leq R$; Б) $OX \geq R$; В) $OX < R$; Г) $OX = R$.
- Пряма має дві спільні точки з колом радіуса R із центром O . Яку фігуру утворюють усі точки X даної прямої такі, що $OX \geq R$?
А) Відрізок; В) промінь;
Б) два промені; Г) пряму.
- На рисунку зображено пряму a , яка дотикається до кола із центром O в точці A . На колі позначено точку B , X — довільна точка прямої a . Яке з поданих тверджень є неправильним?
А) $OX > OB$; Б) $OX \geq OA$; В) $OX \geq OB$; Г) $OA = OB$.
- Яке твердження є правильним?
А) Якщо дві хорди перпендикулярні, то одна з них є діаметром.
Б) Якщо дві хорди точкою перетину діляться навпіл, то вони перпендикулярні.
В) Якщо дотична, проведена через кінець хорди, перпендикулярна до неї, то ця хорда — діаметр.
Г) Якщо одна з хорд ділить другу навпіл, то ця хорда — діаметр.





8. Центр описаного кола трикутника — це точка перетину:
А) висот трикутника;
Б) медіан трикутника;
В) серединних перпендикулярів сторін трикутника;
Г) бісектрис трикутника.
9. Центр вписаного кола трикутника — це точка перетину:
А) висот трикутника;
Б) медіан трикутника;
В) серединних перпендикулярів сторін трикутника;
Г) бісектрис трикутника.
10. Центри вписаного й описаного кіл трикутника збігаються:
А) у рівнобедреному трикутнику;
Б) у рівносторонньому трикутнику;
В) у прямокутному трикутнику;
Г) у різносторонньому трикутнику.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Геометричне місце точок (ГМТ)

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.

Серединний перпендикуляр відрізка як ГМТ

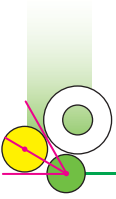
Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Бісектриса кута як ГМТ

Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

Коло

Колом називають геометричне місце точок, рівновіддалених від заданої точки.



Круг

Кругом називають геометричне місце точок, відстань від яких до заданої точки не більша за дане додатне число.

Хорда кола

Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола.

Діаметр кола

Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.

Властивості кола

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

Дотична до кола

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.

Властивість дотичної

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

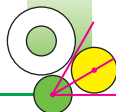
Ознака дотичної до кола

Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.

Властивість дотичних, проведених до кола через одну точку

Коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

**Коло, описане навколо трикутника**

Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центр кола, описаного навколо трикутника

Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.

Коло, вписане в трикутник

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

У будь-який трикутник можна вписати коло.

Центр кола, вписаного в трикутник

Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості

- 665.** Відрізок, довжина якого дорівнює a , поділили на п'ять рівних відрізків. Знайдіть відстань між серединами крайніх відрізків.
- 666.** Точка C — середина відрізка AB , $AB = 10$ см. На прямій AB знайдіть усі точки X такі, що $AX + BX + CX = 12$ см.
- 667.** Точка D — середина відрізка MK , $MK = 16$ см. На прямій MK знайдіть усі точки Y такі, що $MY + KY + DY = 30$ см.
- 668.** На прямій позначили 10 точок: $A, B, C, D, E, F, M, N, K, P$. Скільки при цьому утворилося відрізків, одним із кінців яких є точка A ? Скільки всього утворилося відрізків із кінцями в позначених точках? Чи залежить загальна кількість відрізків від того, лежать позначені точки на одній прямій або ні?
- 669.** На рисунку 337 $AN = 24$ см, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ см. Знайдіть відрізок BM .



Рис. 337

- 670.** Накресліть кут MKE , який дорівнює 120° . Проведіть промінь KC так, щоб $\angle MKC = 60^\circ$. Знайдіть кут SKE та вкажіть його вид. Скільки розв'язків має задача?
- 671.** Градусні міри суміжних кутів ABC і CBD відносяться як $5 : 4$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів ABC і ABD . Скільки розв'язків має задача?
- 672.** Два кути мають спільну сторону й не мають інших спільних точок. Чи є ці кути суміжними, якщо: 1) їхні величини відносяться як $11 : 19$ та один із кутів на 32° більший за другий; 2) їхні величини відносяться як $7 : 3$ та один із кутів на 72° менший від другого?

673. На рисунку 338 $BD \perp BC$. Кут між бісектрисами кутів ABD і DBC дорівнює 55° . Знайдіть кут ABD .

Трикутники

674. Периметр трикутника дорівнює 87 см, одна зі сторін — a см, друга — b см. Складіть вираз для знаходження третьої сторони. Обчисліть довжину третьої сторони, якщо $a = 27$, $b = 21$.
675. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB + BC = 27$ см, $AB + AC = 28$ см, $BC + AC = 29$ см.
676. На рисунку 339 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

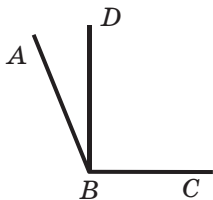


Рис. 338

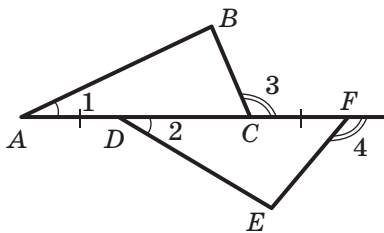


Рис. 339

677. У трикутниках ABC і DEF проведено медіани BM і EK відповідно. Відомо, що $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Доведіть, що: 1) $\triangle BMC = \triangle EFK$; 2) $\triangle ABM = \triangle DEK$.
678. У гострокутних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ проведено висоти BD і B_1D_1 відповідно. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.
679. У трикутниках ABC і MKE відомо, що $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. На відрізку AB позначено точку F , а на відрізку MK — точку P так, що $\angle ACF = \angle MEP$. Яка довжина відрізка CF , якщо $PE = 15$ см?
680. У трикутниках ABC і DEF відомо, що $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. Бісектриси кутів BAC і ABC перетинаються в точці O , а бісектриси кутів DEF і EDF — у точці M . Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DME$.

- 681.** На продовженні основи BC рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку M таку, що $\angle MBA = 128^\circ$. Знайдіть кут між бічною стороною AC та бісектрисою кута ACB .
- 682.** Із точок A і B , які лежать в одній півплощині відносно прямої m , опущено на цю пряму перпендикуляри AC і BD відповідно. Точки A і B рівновіддалені від прямої m , точка O — середина відрізка CD . Доведіть, що трикутник AOB рівнобедрений.
- 683.** На рисунку 340 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Доведіть, що точка E — середина відрізка AC .
- 684.** Рівнобедрені трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC . Доведіть, що пряма BD — серединний перпендикуляр відрізка AC .
- 685.** На рисунку 341 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Доведіть, що $\angle DAO = \angle DCO$.
- 686.** На рисунку 342 $OA = OC$, $OD = OB$. Доведіть, що $\angle DAC = \angle BCA$.

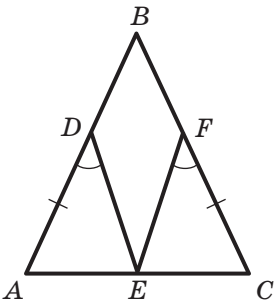


Рис. 340

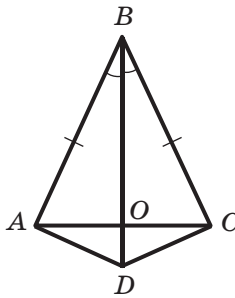


Рис. 341

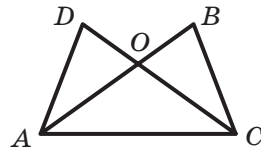


Рис. 342

- 687.** Точка O — точка перетину серединних перпендикулярів сторін AC і BC трикутника ABC — належить його стороні AB . Доведіть, що: 1) точка O — середина відрізка AB ; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.
- 688.** Медіана трикутника ABC розбиває його на два трикутники, периметри яких рівні. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

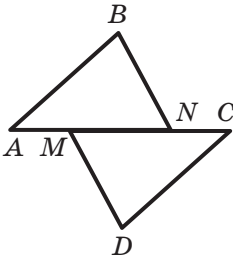


Рис. 343

689. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, BD — медіана. Периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, а трикутника ABD — 40 см. Знайдіть довжину медіани BD .

690. На сторонах AC і BC трикутника ABC позначено точки F і K відповідно. Доведіть, що коли трикутники AFB і AKB рівні, а сторони AK і BF відповідні, то трикутник ABC рівнобедрений.

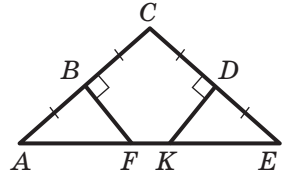
- 691.** На рисунку 343 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Доведіть, що $\angle ABN = \angle CDM$.
- 692.** У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ медіани AM і A_1M_1 рівні, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

- 693.** Через точку, яка не належить прямій a , проведено три прямі. Доведіть, що принаймні дві із цих прямих перетинають пряму a .
- 694.** На сторонах AB і AC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $\angle AMK = \angle ABC$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle ACB$.
- 695.** Доведіть, що:
- 1) бісектриси різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні;
 - 2) бісектриси односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, перпендикулярні.
- 696.** Як взаємно розміщені бісектриси відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною?
- 697.** Пряма, проведена через вершину трикутника паралельно його протилежній стороні, утворює з двома іншими сторонами рівні кути. Доведіть, що даний трикутник рівнобедрений.

698. На продовженні бічних сторін AC і BC рівнобедреного трикутника ABC за вершину C позначено точки E і D відповідно так, що $DE \parallel AB$. Доведіть, що трикутник CDE рівнобедрений.
699. На стороні BC трикутника ABC позначили точки M і K (точка M лежить між точками B і K) так, що $\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Доведіть, що трикутник MAK рівнобедрений.
700. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, у 2 рази менша від цієї основи. Знайдіть кути даного трикутника.
701. На стороні AC трикутника ABC позначили точку O так, що $AB = AO$. Відомо, що зовнішній кут трикутника ABC при вершині A дорівнює 160° і $\angle C = 40^\circ$. Доведіть, що $BO = CO$.
702. На продовженнях сторони AC трикутника ABC за точки A і C позначено відповідно точки M і K так, що $AM = AB$, $CK = BC$. Знайдіть кути трикутника MVK , якщо $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$.
703. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC , перетинає його сторони AB і BC у точках M і K відповідно так, що $AM = MK$. Відомо, що $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Знайдіть кут KAC .
704. У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C .
705. Висоти AD і BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H , $\angle AHB = 128^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .
706. Висоти AD і CM рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) перетинаються в точці H , $\angle AHC = 140^\circ$. Знайдіть кути трикутника ABC .
707. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 42° . Знайдіть менший із кутів, утворених бісектрисою прямого кута й гіпотенузою.

708. Із точок C і D , які лежать в одній півплощині відносно прямої m , опущено перпендикуляри CE і DF на цю пряму, $CF = DE$. Доведіть, що $CE = DF$.



709. На рисунку 344 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Доведіть, що $AF = EK$.

Рис. 344

710. Висоти BM і CK трикутника ABC перетинаються в точці H , $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle ACB = 83^\circ$. Знайдіть кут BHC .

711. Кут між висотою та бісектрисою прямокутного трикутника, проведеними з вершини його прямого кута, дорівнює 12° . Знайдіть гострі кути даного трикутника.

712. На гіпотенузі AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC позначили точки M і K так, що $AC = AM$ і $BC = BK$. Знайдіть кут MCK .

713. Із вершини прямого кута трикутника опустили висоту на гіпотенузу. Доведіть, що два трикутники, які при цьому утворилися, і даний трикутник мають відповідно рівні гострі кути.

714. У трикутниках ABC і DEF відомо, що $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, висоти BM і EK рівні. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.

715. Висоти AM і CK трикутника ABC перетинаються в точці O , $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.

716. Дві висоти рівнобедреного трикутника при перетині утворюють кут 100° . Знайдіть кути даного трикутника.

717. У трикутнику ABC кут ACB прямий, CH — висота даного трикутника, CD — бісектриса трикутника BCH . Доведіть, що $AC = AD$.

718. Кут між висотою та бісектрисою рівнобедреного трикутника, проведеними з однієї вершини, дорівнює 15° . Знайдіть кути даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

719. На продовженнях гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC за точки A і B позначили відповідно точки D і E так, що $AC = AD$, $BC = BE$. Знайдіть кут DCE .

720. У рівносторонньому трикутнику ABC із середини M сторони AC опущено перпендикуляр MK на сторону BC . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $KC = 3$ см.
721. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 60° , а сума гіпотенузи та меншого катета — 27 см. Знайдіть ці сторони трикутника.
722. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $BC = 11$ см. На катеті AC позначили точку M так, що $\angle BMC = 30^\circ$. Знайдіть відрізок AM .
723. На одній стороні кута B позначили точки D і A , а на другій — точки E і C (рис. 345) так, що $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Знайдіть відрізок DE , якщо $\angle B = 30^\circ$, $AC = 12$ см.
724. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать дві медіани рівностороннього трикутника.

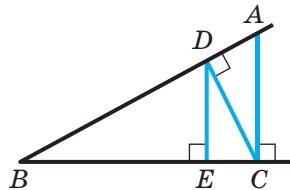


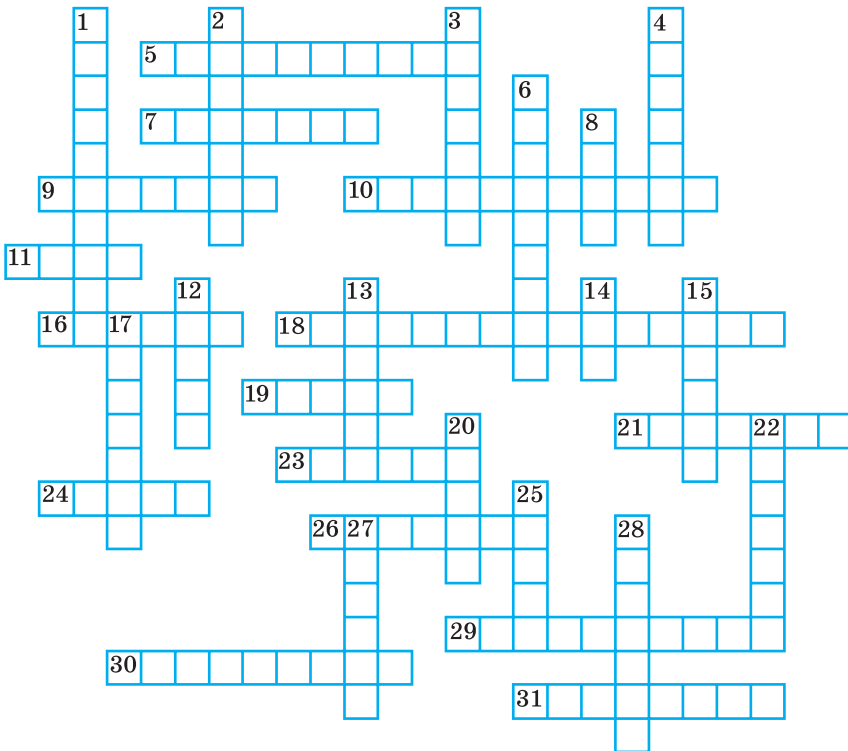
Рис. 345

Коло та круг

725. У колі із центром O проведено діаметр AC та хорди AB і BC такі, що $AB = BC$. Знайдіть кут AOB .
726. Діаметри AB і CD кола із центром O перпендикулярні. На діаметрі AB по різні боки від центра O позначено точки E і F так, що $CE = DF$. Доведіть, що $OE = OF$.
727. У колі із центром O проведено непаралельні хорди MK і NP , $MK = NP$, точки A і B — середини хорд MK і NP відповідно. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OBA$.
728. У колі проведено хорди AB і BC , кожна з яких дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут ABC .
729. Доведіть, що дотичні до кола, проведені через кінці діаметра, паралельні.
730. Діаметр AB ділить кожну із хорд MN і PK , відмінних від діаметра, навпіл. Доведіть, що $MN \parallel PK$.
731. Доведіть, що центр кола рівновіддалений від будь-якої дотичної до кола.

732. Через точку A до кола із центром O проведено дотичні AM і AK , M і K — точки дотику. Точка перетину відрізка OA з колом є серединою цього відрізка. Знайдіть кут MAK .
733. Пряма, яка паралельна хорді AC кола, дотикається до цього кола в точці B . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.
734. Радіус OC кола із центром O ділить навпіл хорду AB , яка не є діаметром. Через точку C проведено дотичну до кола. Доведіть, що ця дотична паралельна хорді AB .
735. Коло, центр якого належить бісектрисі кута, перетинає кожну з його сторін у двох точках. Доведіть, що відрізки, які відтинає коло на сторонах кута, рівні.
736. Через точку M проведено дотичні MK і ME до кола із центром в точці O , де K і E — точки дотику, $\angle OMK = 30^\circ$, $MK = 6$ см. Знайдіть довжину хорди KE .
737. Доведіть, що хорда кола, яка перпендикулярна до іншої хорди цього кола та проходить через її середину, є діаметром даного кола.
738. У колі проведено діаметр AB і хорди AC та BD такі, що $AC \parallel BD$. Доведіть, що відрізок CD — діаметр кола.
739. У рівнобедреному трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, точка O — центр вписаного кола, точки D і E — точки дотику вписаного кола до сторін AC і AB відповідно, $\angle ABC = 48^\circ$. Знайдіть кут DOE .
740. Коло, вписане в трикутник ABC , дотикається до його сторін AB , BC і AC у точках K , M і E відповідно, $AK = BM = CE$. Доведіть, що трикутник ABC рівносторонній.
741. Бісектриси AD і CE трикутника ABC перетинаються в точці O_1 , бісектриси EF і DK трикутника DEB перетинаються в точці O_2 . Доведіть, що точки B , O_1 і O_2 лежать на одній прямій.

742. Розгадайте кросворд.



По горизонталі: **5.** Прямі, які не перетинаються. **7.** Два кути, одна сторона яких спільна, а дві інші — доповняльні промені. **9.** Відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. **10.** Два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого. **11.** Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не більша за дане число. **16.** Відрізок, який сполучає точку кола з його центром. **18.** Прямі, при перетині яких утворюються прямі кути. **19.** Відрізок, що сполучає дві точки кола. **21.** Коло, яке проходить через усі вершини трикутника. **23.** Перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону. **24.** Точка, рівновіддалена від усіх точок

кола. **26.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **29.** Промінь з початком у вершині кута, який ділить кут на два рівних кути. **30.** Кут, суміжний із кутом трикутника. **31.** Сума довжин усіх сторін трикутника.

По вертикалі: **1.** Сторона прямокутного трикутника, протилежна прямому куту. **2.** Одна із частин, на які довільна точка розбиває пряму. **3.** Хорда, яка проходить через центр кола. **4.** Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника. **6.** Геометрична фігура. **8.** Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки. **12.** Кут, градусна міра якого більша за 90° , але менша від 180° . **13.** Одиниця виміру кутів. **14.** Геометрична фігура. **15.** Кут, градусна міра якого дорівнює 90° . **17.** Пряма, яка має з колом одну спільну точку. **20.** Сторона прямокутного трикутника, прилегла до прямого кута. **22.** Твердження, правильність якого приймають без доведення. **25.** Давньогрецький математик. **27.** Автор книги «Начала». **28.** Кут, градусна міра якого менша від 90° .

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

Вивчаючи математику в 5 і 6 класах, ви вже користувалися комп'ютером та оцінили, яким надійним помічником він може бути. Допоможе комп'ютер опанувати й геометрію.

Геометрія вивчає фігури: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо. Тому корисно навчитися користуватися **графічним редактором**, за допомогою якого можна працювати з геометричними фігурами та будувати креслення. Прикладами таких редакторів можуть бути *CorelDraw*, *Visio* тощо. Оберіть за допомогою вчителя графічний редактор для виконання рисунків до завдань цього розділу. Крім цих завдань, за допомогою обраного графічного редактора можна ілюструвати задачі, які ви розв'язуєте. А коли ви захочете зробити доповідь або цікаве повідомлення для товаришів, то можете за допомогою **програм для побудови презентацій** (наприклад, *PowerPoint*) створити навіть мультфільм із «життя» геометричних фігур.

Існує багато програм, створених спеціально для школярів і призначених допомогти **їм вивчати математику: мультимедійні освітні програми, програми для виконання геометричних побудов**. Ви можете знайти їх у мережі Інтернет. А може, набувши знань і вмінь, ви й самі розробите корисні програми для вивчення геометрії.

Наведені нижче завдання ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, які ви будете виконувати за допомогою обраного графічного редактора.

Точки та прямі

1. Ви знаєте, що в геометрії точка розмірів не має. Тому під час графічних побудов доводиться зображати точки умовно, маленькими кружечками (див. рисунки до пункту 1) або окремими пікселями на екрані. Так само пряма, зображена на екрані, матиме товщину (на відміну від прямих, що розглядаються в геометрії).

Освойте в графічному редакторі інструменти для зображення точок і прямих, навчіться проводити пряму через дві точки.

2. Освойте інструмент, який дає змогу підписувати точки та прямі великими й малими буквами латинського алфавіту.

Відрізок і його довжина

3. Зобразіть дві точки, побудуйте відрізок, кінцями якого є дві задані точки.
4. Знайдіть, яким чином графічний редактор вказує довжину відрізка.
5. Побудуйте відрізок заданої довжини.
6. Знайдіть інструмент, за допомогою якого можна пересувати й повертати фігури.
7. Побудуйте два відрізки однакової довжини та сумістіть їх накладанням.
8. Побудуйте креслення, яке ілюструє основну властивість довжини відрізка. Перевірте, чи виконується ця властивість, визначивши довжини побудованих відрізків.
9. Чи є в обраному вами графічному редакторі засоби для знаходження середини відрізка?

Промінь. Кут

10. Побудуйте кілька різних кутів. Знайдіть інструмент, за допомогою якого можна визначати величину кута й будувати кути заданої величини.
11. Побудуйте креслення, яке ілюструє основну властивість величини кута. Перевірте, чи виконується ця властивість, визначивши величини побудованих кутів.
12. Знайдіть інструмент, який дає змогу зображати дуги. Нарисуйте кілька кутів і позначте рівні кути однаковою кількістю дужок. Зверніть увагу на те, що на рисунках основні й допоміжні лінії мають різну товщину. Знайдіть інструмент, який дає змогу обирати товщину лінії.
13. Зобразіть суміжні й вертикальні кути.

Перпендикулярні прямі

14. Знайдіть у графічному редакторі інструмент, призначений для побудови перпендикулярних прямих. Побудуйте за допомогою цього інструмента прямий кут.
15. Нарисуйте пряму й точку, яка лежить на даній прямій. Проведіть через цю точку пряму, перпендикулярну до даної.
16. Нарисуйте пряму й точку, яка не лежить на даній прямій. Проведіть через цю точку пряму, перпендикулярну до даної.

Трикутник. Висота, медіана, бісектриса трикутника

17. Щоб зобразити трикутник, зазвичай рисують три відрізки, які являють собою його сторони. Нарисуйте ці три відрізки. Знайдіть інструмент, який дає змогу «склеїти» ці три відрізки й надалі розглядати їх як єдину фігуру — трикутник.
18. Нарисуйте гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники.
19. Знайдіть інструмент, який дає змогу копіювати вже нарисовану фігуру, та інструмент, який дає змогу переміщати й повертати фігури. За допомогою цих інструментів зобразить кілька рівних трикутників.
20. Побудуйте довільний трикутник і з кожної його вершини проведіть висоту, медіану, бісектрису. Які інструменти ви використовуєте для того, щоби побудова була точною? Виконайте таку побудову для гострокутного, прямокутного, тупокутного трикутників.

Рівнобедрений трикутник

21. Побудуйте рівнобедрений і рівносторонній трикутники. Які можливості графічного редактора спростять побудову?
22. Як можна використати теорему 10.3 для побудови рівнобедреного трикутника?

Ознаки рівності трикутників

23. Побудуйте два трикутники, у яких дві сторони та кут між ними відповідно рівні. Як продемонструвати, що побудовані трикутники рівні?
24. Нарисуйте відрізок і побудуйте його серединний перпендикуляр.
25. Побудуйте два трикутники, у яких сторона та два прилеглі до неї кути відповідно рівні. Як продемонструвати, що побудовані трикутники рівні?
26. Зробіть рисунок, який ілюструє властивість серединного перпендикуляра. Оберіть на серединному перпендикулярі кілька точок. За допомогою якого інструмента можна перевірити, чи є ці точки рівновіддаленими від кінців відрізка?

Паралельні прямі

27. Виконуючи попередні завдання, ви освоїли інструменти, які дають змогу копіювати й переміщати вже побудовані фігури. Як за допомогою цих інструментів побудувати паралельні прямі?
28. Придумайте, як будувати паралельні прямі, використовуючи теорему 13.1.
29. Нарисуйте пряму та точку, яка їй не належить. Проведіть через цю точку пряму, паралельну даній. Збільште отриманий рисунок. Чи може цей рисунок переконливо проілюструвати аксіому паралельності прямих? Чому? Цей приклад показує, що всі геометричні побудови, які ми можемо виконати або на папері, або за допомогою комп'ютера, є досить умовними. Тому, навіть зробивши чудовий рисунок, слід покладатися не на нього, а на математичні факти й доведення.
30. Використовуючи теореми 14.1–14.3, побудуйте кілька пар паралельних прямих. Як, використовуючи інструменти графічного редактора, показати, що ці прямі справді виявилися паралельними?
31. Зробіть кілька рисунків, що ілюструють властивості паралельних прямих. За допомогою інструментів графічного редактора покажіть, що ці властивості виконуються.
32. Нарисуйте дві паралельні прямі. Як визначити відстань між ними?

Сума кутів трикутника

33. Нарисуйте довільний трикутник. Побудуйте всі його зовнішні кути. Користуючись засобами графічного редактора, знайдіть величини всіх побудованих кутів.

Прямокутний трикутник

34. Нарисуйте прямокутний трикутник і позначте його прямиий кут «куточком» з використанням тонких ліній (див. рис. 256).
35. Побудуйте пари трикутників, що ілюструють ознаки рівності прямокутних трикутників. Позначте на рисунку рівні сторони однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок.

36. Побудуйте прямокутний трикутник, гострий кут якого дорівнює 30° . Перевірте, чи виконуються для нього твердження теореми 18.1 і ключової задачі 1 пункту 18.

Коло та круг

37. Освойте інструмент для зображення кіл і кругів. Чим відрізняються зображення кола й круга? Який інструмент потрібен, щоб із зображення кола зробити зображення круга?
38. Нарисуйте коло, проведіть його хорду та діаметр. Який елемент зображення кола потрібен, щоб точно провести діаметр?
39. Нарисуйте коло й позначте на ньому точку. Які інструменти треба використати, щоби провести дотичну до кола в цій точці?

Описане та вписане кола трикутника

40. Нарисуйте довільний трикутник. Побудуйте його вписане й описане кола, не користуючись теоретичним матеріалом пункту 21. Тепер побудуйте ці самі кола, користуючись наслідками з теорем 21.1 і 21.2. Чи вдалося виконати цю побудову швидше та точніше?

Задачі на побудову

41. У задачах на побудову використовують циркуль і лінійку. Якщо ви хочете виконати побудову за допомогою графічного редактора, то які його інструменти можна використати замість циркуля та лінійки?
42. Освойте інструмент, який дає змогу зображати різні геометричні фігури різними кольорами.
43. Чи є в обраному вами графічному редакторі інструмент, який дає змогу автоматично знаходити переріз нарисованих геометричних фігур?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

14. 1 точка, або 4 точки, або 6 точок. 15. Найменша можлива кількість точок перетину — 1, найбільша — 10. 16. Рис. 346. 17. 12 точок. 18. Рис. 347. 39. 8 см або 56 см. 41. 1) Усі точки відрізка EF ; 2) точки A і B (рис. 348); 3) таких точок не існує. 42. Таких точок дві. Одна з них є такою внутрішньою точкою C відрізка AB , що $AC : BC = 1 : 2$, а друга — така, що точка A — середина відрізка BC . 43. 4 см. 44. а) 4 точки; б) 3 точки; в) 4 точки; г) 3 точки. 46. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$.

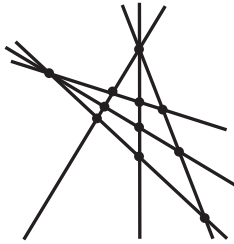


Рис. 346

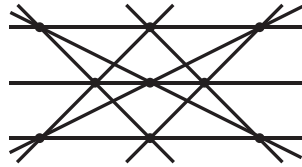


Рис. 347

47. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. 69. 60° . 70. 108° . 73. 68° . 74. 153° . 75. 1) 6° ; 2) $0,5^\circ$. 77. 50° або 110° . 78. 77° або 163° . 82. *Вказівка*. Відкладіть від довільного променя даний кут послідовно 14 разів. Скористайтеся тим, що утворений таким чином кут на 2° більший за розгорнутий кут. 83. 1) *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ$. 84. Так. *Вказівка*. Припустіть, що такого кута немає, та отримайте суперечність. 105. 90° . 106. 180° . 107. 75° . 108. 108° , 72° . 109. 136° , 44° . 123. 1) 124° ; 2) 98° . 124. 126° . 128. 70° , 160° . 129. 1) *Вказівка*. $90^\circ = 17^\circ \cdot 5 + 5^\circ$. 149. 48 см. 150. 13 см. 152. 120° . 188. 3 см. 189. 10 см.



Рис. 348

191. 2) *Вказівка*. Доведіть, що $\angle AOM = \angle BOK$. Кут AOB розгорнутий. Тоді $\angle AOM + \angle MOB = 180^\circ$. Звідси $\angle MOB + \angle BOK = 180^\circ$. 194. 20° , 70° . 223. 4 см або 7 см. 224. 4 см і 6 см або 5 см і 5 см.

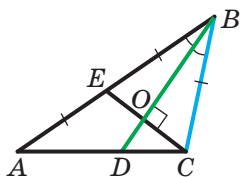


Рис. 349

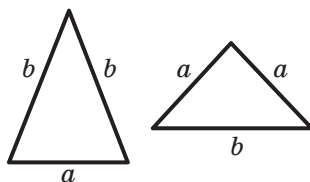


Рис. 350

228. 26 см або 14 см. 230. 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$. 243. Вказівка. Ско-

риставшись тим, що коли бісектриса трикутника є його висотою, то трикутник рівнобедрений, доведіть, що трикутники MAD і KBD рівнобедрені. 244. 8 см. 245. $AB : AC = 1 : 2$. 247. 2 см, 3 см, 4 см. Вказівка. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC (рис. 349), відрізок CE — його медіана, $BD \perp CE$. Доведіть, що трикутник CBE рівнобедрений ($BC = BE$). Тоді $AB = 2BC$ і можуть мати місце такі випадки: $AB - BC = 1$ см або $AB - BC = 2$ см, тобто $BC = 1$ см або $BC = 2$ см. 248. 2 см. Вказівка. Доведіть, що трикутники KMC і KDA рівнобедрені. 264. Ні. Вказівка. Розгляньте трикутники, зображені на рисунку 350. 265. Вказівка. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, відрізки AM і A_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, MBD і $M_1B_1D_1$ і, нарешті, ABC і $A_1B_1C_1$. 281. Вказівка. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники, відрізки AM і A_1M_1 — відповідно їхні медіани, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. На продовженнях відрізків AM і A_1M_1 за точки M і M_1 відкладіть відповідно відрізки MD і M_1D_1 такі, що $MD = AM$ і $M_1D_1 = A_1M_1$. Доведіть, що $AC = BD$ і $A_1C_1 = B_1D_1$. Далі доведіть рівність трикутників ABD і $A_1B_1D_1$, звідки легко отримати рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. 293. Безліч. 295. Вказівка. Припустимо, що прямі a і b перетинаються. Виберемо довільну точку, яка належить прямій a , відмінну від точки

перетину a і b . Через вибрану точку можна провести пряму, яка перетинає пряму a та паралельна прямій b , що суперечить умові. **296.** 6 см. **297.** 35° . **298.** 90° . **317.** Ні. **320.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутник BKM рівнобедрений. **321.** *Вказівка.* Доведіть, що $BF \parallel AC$ і $BD \parallel AC$, та скористайтесь аксіомою паралельності прямих. **322.** 111° або 69° . **340.** 40° . **343.** 40° , 70° , 70° . **344.** 121° . **348.** *Вказівка.* Проведіть через точку C пряму, яка паралельна AB . **351.** *Вказівка.* Доведіть, що трикутники AMO і CKO рівнобедрені. **353.** $AD : DB = 2 : 3$. **396.** 25° , 55° , 100° . **399.** 35° , 35° , 110° . **400.** 140° . **403.** *Вказівка.* Знайдіть кути трикутника ABC і доведіть, що трикутники AMB і MAC рівнобедрені. **404.** 36° , 72° , 72° . **405.** *Вказівка.* Застосуйте метод доведення від супротивного. **407.** Гострокутний. *Вказівка.* Розгляньте по черзі кожний кут трикутника. Оскільки сума двох інших кутів більша за 90° , то розглядуваний кут менший від 90° . Оскільки всі кути виявляться меншими від 90° , то трикутник гострокутний. **408.** *Вказівка.* У трикутнику DAC кут DAC тупий. Отже, $DC > AC$. **410.** Ні. **412.** 36° , 72° , 72° або 90° , 45° , 45° . **414.** *Вказівка.* Візьміть на прямій m довільну точку X і порівняйте суму $AX + BX$ із довжиною відрізка AB . **415.** 3 см. **416.** $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. **417.** *Вказівка.* На продовженні медіани AM за точку M відкладіть відрізок MD , який дорівнює цій медіані, та розгляньте трикутник ABD . **418.** $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. **419.** 90° , 40° , 50° . *Вказівка.* Розгляньте трикутник DAK , де точка K — середина AB . **421.** 36 см. **449.** *Вказівка.* Доведіть рівність трикутників AKH і CMH . **450.** *Вказівка.* Доведіть, що $\triangle MEN = \triangle NFM$. Звідси випливає, що $MK = NK$. Крім того, $KE = FM = NE$. Отже, $MK = MN$. **451.** Ні. **453.** 50° , 130° . **465.** 30° , 1 см. **466.** 9 см. **467.** 15 см. **470.** 8 см. **471.** 6 см. *Вказівка.* Доведіть, що трикутник ADB рівнобедрений. **473.** 21 см. **491.** 1,5 см. **492.** 60 см. **493.** Коло даного радіуса із центром у даній точці. **494.** Серединний перпендикуляр відрізка, який сполучає дані точки. **495.** Дві прямі, які складаються з бісектрис чотирьох кутів, утворених при перетині даних прямих. **496.** Усі точки

серединного перпендикуляра даної основи, крім точки перетину цього перпендикуляра з основою. **497.** Пряма, що є серединним перпендикуляром відрізка, який є перпендикулярним до даних прямих і кінці якого належать даним прямим. **498.** Пара паралельних прямих, кожна з яких віддалена від даної прямої на дану відстань. **499. Вказівка.** Сполучіть точку M і центр O кола, розгляньте трикутники AOM і BOM . **500.** Усі точки півплощини, якій належить точка B і межею якої є серединний перпендикуляр відрізка AB , за винятком межі цієї півплощини. **501.** Усі точки площини, що не належать колу із центром A і радіусом AB . **503.** 55° , 85° , 40° . **505.** 20° . **521.** 1) 90° ; 2) 120° . **522.** 12 см. **523.** 40° . **524.** 120° . **529.** Усі точки прямої, що проходить через дану точку перпендикулярно до даної прямої, крім даної точки. **530.** Усі точки бісектриси кута, за винятком вершини кута. **531.** Усі точки площини, за винятком даної прямої. **532. Вказівка.** Розглянувши трикутник OAK , доведіть, що $OK = 2AK$. **533. Вказівка.** Скористайтесь властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку. **537.** 18° . **557.** 24 см, 24 см, 20 см. **558.** 20 см, 14 см, 18 см. **559.** 50° , 55° , 75° . **562. Вказівка.** Скористайтесь властивістю дотичних, проведених до кола через одну точку. **563. а.** **564.** 16 см. **Вказівка.** Доведіть, що сума периметрів утворених трикутників дорівнює периметру даного трикутника. **565.** 0,5 см. **Вказівка.** Нехай M_1 і M_2 — точки дотику кіл, вписаних відповідно в трикутники ABD і DBC . Для відрізків DM_1 і DM_2 скористайтесь результатом задачі 562. **566. Вказівка.** Скористайтесь тим, що бісектриси трикутника, зокрема трикутника AMC , перетинаються в одній точці. **567. Вказівка.** Позначте на різних сторонах кута точки M і N . Проведіть бісектриси кутів VMN і VNM . Далі позначте на різних сторонах кута точки E та F . Проведіть бісектриси кутів BEF і BFE . **568.** 36° , 36° , 108° . **Вказівка.** Скористайтесь тим, що трикутники FAO і BOA рівнобедрені. **570.** 52° , 52° , 76° . **571.** 3 см, 7 см. **595. Вказівка.** Проведіть через дану точку, що лежить на стороні кута, перпендикуляр до другої сторони кута. **597.** 1) **Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює

даній бісектрисі, а гострий кут дорівнює половині даного кута. **599. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, у якому один із катетів дорівнює половині даної основи, а другий — радіусу кола. **602. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює даній висоті, і протилежним гострим кутом, що дорівнює даному. **604. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, у якому гіпотенуза дорівнює даній стороні, а катет — даній висоті. **611. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює різниці катета й радіуса, а другий — радіусу. Тоді кут, протилежний другому катету, дорівнює половині гострого кута шуканого трикутника. **615. Вказівка.** Побудуйте коло, що проходить через три задані точки. **616.** Побудуйте кут, який дорівнює 60° . Далі скористайтеся рівністю $6^\circ = 60^\circ - 54^\circ$. **618.** 1) $15^\circ, 95^\circ, 70^\circ$; 2) $46^\circ, 59^\circ, 75^\circ$. **619.** $25^\circ, 65^\circ$. **620.** 1) Гострокутний; 2) тупокутний. **631. Вказівка.** Шукана точка належить ГМТ, віддалених на відстань AB від прямої n . Указане ГМТ — пара прямих, паралельних прямій n . Кожна з точок перетину цих прямих із прямою t задовольняє умову. Задача має два розв'язки. **638. Вказівка.** Проведіть відрізок, перпендикулярний до двох даних паралельних прямих, кінці A і B якого належать цим прямим. Тоді центр шуканого кола належить двом ГМТ: першому — рівновіддалених від точок A і B і другому — віддалених від даної в умові точки на відстань $\frac{1}{2}AB$. **639. Вказівка.** Геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в даній точці B , є пряма, перпендикулярна до даної і така, що проходить через цю точку (дана точка B не належить ГМТ). Геометричним місцем центрів кіл, що проходять через точки A і B , є серединний перпендикуляр відрізка AB .

645. Вказівка. Побудуйте прямокутний трикутник BCD , у якому катет BC дорівнює даному катету, а катет DC — сумі гіпотенузи та другого катета. Тоді вершина A шуканого трикутника ABC належить серединному перпендикуляру відрізка BD . **646. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADB , у якому $\angle D = 45^\circ$, сторона DB дорівнює сумі даних катетів, сторо-

на AB — даній гіпотенузі. **647. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADB , у якому $\angle D = 135^\circ$, сторона DB дорівнює різниці даних катетів, сторона AB — даній гіпотенузі. **648. Вказівка.** Побудуйте трикутник DBC , у якому $\angle C = 90^\circ$, катет CB дорівнює даному катету, катет CD — різниці гіпотенузи й другого катета. Тоді шукана вершина A лежить на серединному перпендикулярі відрізка DB . **650. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADC , у якому сторона AC дорівнює даній, сторона DC — сумі двох інших сторін, кут DCA — даному куту. **651. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADC за даною стороною AC , даним кутом C і стороною DC , що дорівнює даній різниці сторін. Вершина B шуканого трикутника ABC лежить на серединному перпендикулярі відрізка AD . Описана побудова застосовна до випадку, коли заданий кут C прилягає до більшої з двох невідомих сторін. **652. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADC , у якому $\angle D = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній різниці сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC . **653. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADC , у якому $\angle D = \frac{\beta}{2}$, де β — даний кут, сторона AC дорівнює даній стороні, сторона AD — даній сумі сторін. Тоді шукана вершина B лежить на серединному перпендикулярі відрізка DC . **654. Вказівка.** Побудуйте трикутник ADC , у якому AC — дана сторона, відрізок DC дорівнює сумі невідомих сторін, $\angle DAC = 90^\circ + \alpha$, де α — половина різниці кутів, про яку йдеться в умові. **656. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом, який дорівнює висоті, і протилежним кутом, який дорівнює даному. Гіпотенуза цього трикутника — одна зі сторін шуканого. Тепер задачу зведено до задачі **650**. **657. Вказівка.** Побудуйте прямокутний трикутник BDM , у якому гіпотенуза BM дорівнює даній медіані, катет BD — даній висоті. Тоді центр описаного кола шуканого трикутника лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка DM , яка проходить через точку M . **658. Вказівка.** Побудуйте трикутник ABD , у якому сторони AB і AD дорівнюють двом даним сторонам,

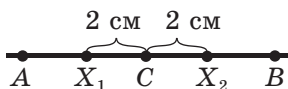


Рис. 351

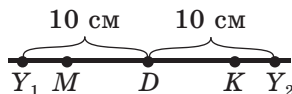


Рис. 352

а сторона BD у 2 рази більша за дану медіану. **659.** *Вказівка.* Побудуйте трикутник ADC , у якому AC — дана сторона, сторона AD у 2 рази більша за дану медіану, а висота, проведена з вершини D , дорівнює даній висоті. Покажіть, що сторона DC дорівнює одній з невідомих сторін шуканого трикутника. **661.** 65° . **662.** $15^\circ, 75^\circ$. **663.** 180° . **665.** $\frac{4a}{5}$. **666.** Точки

X_1 і X_2 , зображені на рисунку 351. **667.** Точки Y_1 і Y_2 , зображені на рисунку 352. **670.** 60° або 180° . Два розв'язки. **671.** 40° або 140° . Два розв'язки. **673.** 20° . **675.** 42 см. **689.** 15 см. **700.** $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. **702.** $30^\circ, 40^\circ, 110^\circ$. **703.** 35° . **704.** 10° . **705.** $52^\circ, 52^\circ, 76^\circ$. **706.** $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$. **711.** $33^\circ, 57^\circ$. **712.** 45° . **716.** $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$ або $80^\circ, 80^\circ, 20^\circ$. **718.** $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ або $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$. **719.** 135° . **722.** 22 см. **723.** 9 см. **724.** 60° . **728.** 120° . **732.** 60° . **736.** 6 см. **738.** *Вказівка.* Нехай O — центр кола. Доведіть, що $\angle COD = 180^\circ$. **739.** 114° . **741.** *Вказівка.* Доведіть, що точки O_1 і O_2 належать бісектрисі кута B .

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі

Номер завдання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	В	Г	А	В	В	В	Б	Б	В	Б	В
2	Б	Б	Г	Г	Б	В	Б	Б	А	В	Б
3	Г	В	В	А	А	Б	В	В	Б	В	Б
4	В	Г	А	В	Б	А	В	В	Г	Б	—

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- А**ксиома 47
 — паралельності прямих 105
 Аналіз задачі на побудову 175
- Б**ісектриса кута 27
 — трикутника 59
 Бічна сторона рівнобедреного трикутника 74
- В**еличина кута 28
 Вершина кута 26
 — рівнобедреного трикутника 75
 — трикутника 56
 Висновок теореми 92
 Висота трикутника 59
 Відрізки паралельні 104
 — перпендикулярні 42
 — рівні 17
 Відрізок 17
 — одиничний 17
 Відстань від точки до прямої 43
 — між паралельними прямими 119
 — між точками 19
 Властивість вертикальних кутів 37
 — відповідних кутів 110
 — дотичної 160
 — односторонніх кутів 110
 — різносторонніх кутів 109
 — суміжних кутів 36
 Властивості зовнішнього кута трикутника 124
 — кола 159
 — паралельних прямих 109, 110
 — прямокутного трикутника 140
 — рівнобедреного трикутника 75
 Внутрішня точка відрізка 17
 Вписане коло трикутника 167
- Г**еометрія 10
 Геометричне місце точок 150
 Гіпотенуза 133
 Градус 27
 Градусна міра кута 28
- Д**іаметр кола 153
 — кола 154
 Довжина відрізка 18
 Дотична до кола 159
 — — кола 160
- К**атет 133
 Кінці відрізка 17
 Коло 153
 —, вписане в трикутник 167
 —, описане навколо трикутника 166
 Круг 154
 Кут 26
 — гострий 30
 — між прямими 42
 — одиничний 27
 — при вершині рівнобедреного трикутника 75
 — при основі рівнобедреного трикутника 75
 — прямий 30
 — розгорнутий 27
 — трикутника 56
 — трикутника зовнішній 124
 — тупий 30
 Кути вертикальні 37
 — відповідні 109
 — односторонні 109
 — рівні 27
 — різносторонні 109
 — суміжні 36
- М**едіана трикутника 59
 Межа півплощини 27
 Метод від супротивного 93
 — геометричних місць точок 185
 Мінута 29
- Н**аслідок 93
 Нерівність трикутника 125
- О**диниця довжини 18
 Ознака дотичної до кола 161

- Ознаки паралельності прямих 104, 109
 — рівнобедреного трикутника 82
 — рівності прямокутних трикутників 134, 135
 — рівності трикутників 65, 66, 87
 Означення 13
 Описане коло трикутника 166
 Основа перпендикуляра 43
 — рівнобедреного трикутника 74
 Основна властивість 47
 — — величини кута 30
 — — довжини відрізка 19
 — — паралельних прямих 105
 — — прямої 12
 — — рівності трикутників 58
Периметр трикутника 56
Перпендикуляр 43
Півплощина 27
Півпряма 25
Планіметрія 10
Побудова бісектриси кута 178
 — кута, що дорівнює даному 175
 — прямої, перпендикулярної до даної 177
 — серединного перпендикуляра відрізка 176
 — трикутника за даними сторонами 178–180
Поділ відрізка навпіл 177
Постулат 50
Похила 43
Початок променя 25
Прийом додаткової побудови 94
Промені доповняльні 25
 — паралельні 104
 — перпендикулярні 42
Промінь 25
Пряма 12
Прямі паралельні 104
 — перпендикулярні 41
 —, що перетинаються 13
Радіус кола 153
 — круга 154
Рулетка 18
Румб 30
Секунда 29
Середина відрізка 19
Серединний перпендикуляр відрізка 65
Січна 109
Сторони кута 26
 — трикутника 56
Сума відрізків 19
 — кутів 30
 — кутів трикутника 124
Теорема 13
 — -властивість 93
 — -наслідок 93
 — обернена 93
 — ознака 93
 — пряма 93
Теореми взаємно обернені 93
Точка 12
 — дотику 159
 — перетину бісектрис трикутника 168
 — перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника 167
Трикутник 56
 —, вписаний у коло 166
 — гострокутний 56
 —, описаний навколо кола 167
 — прямокутний 56
 — рівнобедрений 74
 — рівносторонній 75
 — різносторонній 76
 — тупокутний 57
Трикутники рівні 57
Умова теореми 92
Фігури рівні 59
Хорда кола 153
 — круга 154
Центр кола 153
 — —, вписаного в трикутник 168
 — —, описаного навколо трикутника 168
 — круга 154

ПОХОДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

- Аксиома** від грецького *axios* — гідний визнання
- Бісектриса** від латинського *bis* — двічі та *sectrix* — січна
- Геометрія** від грецького *geo* — земля та *metreo* — вимірювати
- Гіпотенуза** від грецького *gipotenusa* — та, що стягує
- Градус** від латинського *gradus* — крок, ступінь
- Діагональ** від грецького *dia* — через і *gonium* — кут
- Діаметр** від грецького *diametros* — поперечник
- Катет** від грецького *katetos* — висок
- Квадрат** від латинського *quadratus* — чотирикутний (від *quattuor* — чотири)
- Куб** від грецького *kybos* — гральна кісточка
- Математика** від грецького *mathematike* (від *mathema* — знання, наука)
- Медіана** від латинського *medius* — середній
- Метр** від французького *mètre* — палка для вимірювання або грецького *metron* — міра
- Паралельність** від грецького *parallelos* — той, хто йде поруч
- Периметр** від грецького *peri* — навколо та *metreo* — вимірювати
- Перпендикуляр** від латинського *perpendicularis* — прямовисний
- Планіметрія** від грецького *planum* — площа
- Пропорція** від латинського *proportio* — співвідношення
- Радіус** від латинського *radius* — спиця в колесі, промінь
- Теорема** від грецького *theoreo* — розглядаю, обдумую
- Транспортир** від латинського *transportaro* — переносити, перекладати
- Фігура** від латинського *figura* — зовнішній вигляд, образ
- Формула** від латинського *formula* — форма, правило
- Хорда** від грецького *chorde* — струна, тятива
- Центр** від латинського *centrum* — вістря ніжки циркуля
- Циркуль** від латинського *circulus* — коло

ЗМІСТ

<i>Від авторів</i>	3
<i>Умовні позначення</i>	7
<i>Вступ. Що вивчає геометрія?</i>	8
§ 1. Найпростіші геометричні фігури та їхні властивості	11
1. Точки та прямі.....	12
2. Відрізок і його довжина	17
3. Промінь. Кут. Вимірювання кутів.....	25
4. Суміжні та вертикальні кути.....	36
5. Перпендикулярні прямі	41
6. Аксиоми.....	46
● З історії геометрії	48
<i>Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	51
<i>Головне в параграфі 1</i>	53
§ 2. Трикутники	55
7. Рівні трикутники. Висота, медіана, бісектриса трикутника	56
8. Перша та друга ознаки рівності трикутників.....	64
9. Рівнобедрений трикутник та його властивості ...	74
10. Ознаки рівнобедреного трикутника	81
11. Третя ознака рівності трикутників	87
12. Теореми.....	92
<i>Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	97
<i>Головне в параграфі 2</i>	100
§ 3. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника	103
13. Паралельні прямі	104
14. Ознаки паралельності двох прямих	109
● П'ятий постулат Евкліда	116
15. Властивості паралельних прямих	117
16. Сума кутів трикутника. Нерівність трикутника	124
17. Прямокутний трикутник.....	133
18. Властивості прямокутного трикутника	140
<i>Завдання № 3 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	144
<i>Головне в параграфі 3</i>	146

§ 4. Коло та круг	149
19. Геометричне місце точок. Коло та круг.....	150
20. Властивості кола. Дотична до кола.....	159
21. Описане та вписане кола трикутника.....	166
22. Задачі на побудову	174
23. Метод геометричних місць точок у задачах на побудову	185
● З історії геометричних побудов	191
<i>Завдання № 4 «Перевірте себе» в тестовій формі</i>	<i>193</i>
<i>Головне в параграфі 4</i>	<i>194</i>
 <i>Вправи для повторення курсу геометрії 7 класу</i>	<i>197</i>
● Дружимо з комп'ютером	207
<i>Відповіді та вказівки до вправ</i>	<i>212</i>
<i>Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі.....</i>	<i>218</i>
<i>Предметний покажчик</i>	<i>219</i>
<i>Походження математичних термінів</i>	<i>221</i>