**Тема уроку.** Теорема косинусів.

**Мета:** сформувати апарат розв’язування довільних трикутників.

В результаті вивчення теми (15 годин) учні повинні

*знати:*

* основні тригонометричні тотожності;
* теорему косинусів і наслідки з неї;
* твердження про властивості діагоналей паралелограма;
* теорему синусів і наслідки з неї;
* що означає розв’язати трикутник;
* чотири типа задач: по даній стороні та двом кутам; по двом сторонам та куту між ними; по двом сторонам та куту, протилежному одній з них; за трьома сторонами.

*вміти:*

* перетворювати прості тригонометричні тотожності;
* доводити теорему косинусів;
* записувати у вигляді рівностей теорему косинусів відповідно до даного трикутника;
* застосовувати теорему косинусів;
* доводити теорему синусів;
* складати пропорції для сторін та кутів даного трикутника;
* застосовувати її при розв’язування задач;
* розв’язувати задачі 4-х типів

**ЗВЕРНІТЬ УВАГУ завдання що надаються з темою ви виконуєте самі не надсилаючи їх вони надаються вам для тренування , надсилатимете лише контрольні та самостійні роботи. Якщо щось не зрозуміли за темою зверніть увагу на підручники за посиланням** [**http://4book.org/uchebniki-ukraina/6-klass?start=14**](http://4book.org/uchebniki-ukraina/6-klass?start=14)

**Виберіть потрібний клас та підручник що сподобався**

**Прочитати та опрацювати**

**Мета уроку:** вивчення теореми косинусів. Формування вмінь учнів застосовувати теорему косинусів до розв'язування задач.

**Тип уроку:** комбінований.

**Наочність і обладнання:** таблиця «Співвідношення між сторонами і кутами трикутника».

**Вимоги до рівня підготовки учнів:** формулюють теорему косинусів та доводять її.

**Хід уроку**

**I. Перевірка домашнього завдання**

Перевірити наявність виконаних домашніх завдань та відпо­вісти на запитання, які виникли в учнів у ході їх розв'язування.

**ІІ. Аналіз результатів самостійної роботи**

**ІІІ. Мотивація навчальної діяльності**

Ми приступаємо до вивчення теми «Розв'язування трикутників».

Розв'язати трикутник означає знайти відомі елементи трикут­ника (сторони, кути) за даними відомими елементами. У 8-му кла­сі ви вже навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Прямо­кутний трикутник визначається за двома елементами, серед яких є хоча б один лінійний елемент (сторона). Ви вмієте знаходити невідомі елементи прямокутного трикутника, якщо дано: катет і гіпотенузу; гіпотенузу і гострий кут; катет і прилеглий гострий кут; катет і протилежний гострий кут.

Щоб розв'язати довільний (не прямокутний) трикутник, треба знати три елементи, серед яких має бути хоча б один лі­нійний.

Зараз ви ознайомитеся з теоремою, яка дозволяє за двома сторонами і кутом між ними знаходити третю сторону, невідомі кути трикутника. Ця теорема називається теоремою коси­нусів.

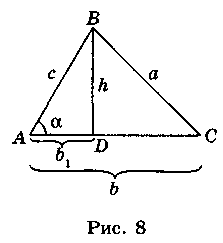
**IV. Сприймання й усвідомлення нового матеріалу**

*Вивчення теореми косинусів*

Сформулюємо теорему та ознайомимо з її доведенням учнів.

**Теорема.** *Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.*

*Доведення*

Нехай задано трикутник *ABC,* доведемо, що

*а*2 *= b*2 *+ с*2 *–* 2*bc cos*α*,* де *а = ВС, b = AC, с = АВ,* *A =* α*.*

Розглянемо три випадки: якщо кут *А* є гострим, тупим і пря­мим.

*1-й випадок*

Якщо кут *А* гострий (рис. 8), то проведемо висоту *BD* і розглянемо пря­мокутний трикутник *BDC.* У ньому *ВС*2 *= DC*2 *+ BD*2або *a*2 *=* (*b – b*1)2 *+ h*2*.* (1)

Виразимо *b*1 і *h* через основні елементи трикутника *ABC.* Із трикутника *ABD* миємо: *h = c*sinα*, b*1 = *c*cosα. Замінивши *h* і *b*1 у виразі (1) їх значеннями, знай­демо:

*a*2 = (*b* – *c*cosα)2 + *с*2sin2α = *b*2 – 2*bc*cosα + *с*2cos2α + *c*2sin2α *=*

*= b2 –* 2*bc*cosα + *c*2(sin2α + cos2α) = *b*2 – 2*bc*cosα + c2 · 1 = *b*2 + *c*2 – 2*bc*cosα.

Отже, *a*2 = *b*2 + *c*2 – 2*bc*cosα, що і треба було довести.

*2-й випадок*

Нехай кут А тупий (рис. 9). Із вершини *В* проведемо висоту *BD* на продовження сторони *АС.* Із прямокутного трикутника *BDC* маємо:

*BC*2 *= BD*2 *+ DC*2або *a*2 *= h*2 + (*b + b*1)2.(2)

Значення *h* і *b*1 виразимо через основні елементи трикутни­ка *ABC.* Із трикутника *ABD* маємо: *h* = *c*sin(180°- α) = *c*sinα, *b*1= *c*cos(180° - α) = -*c*cosα. Замінивши *h* і *b*1у виразі (2) їх значен­нями, після деяких перетворень маємо:

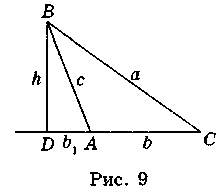
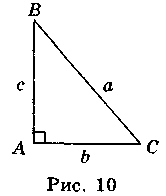
*a2* = *c*2sin2α + (*b – c*cosα) = *с*2sin2α + *b*2– 2*bc*cosα + *c*2cos2α = (*c*2sin2α + + *c*2cos2α) + *b*2 *–* 2*bc*cosα = *c*2(sin2α + cos2α) + *b*2– 2*bc*cosα *= b*2 *+ c*2 – 2*bc*cosα*.*

Отже, *a*2 *= b*2 *+ c*2 – 2*bc*cosα,що і треба було довести.

*3-й випадок*

Нехай кут *А* прямий, α = 90° (рис. 10). У цьому випадку cosα = cos 90° = 0, отже, маємо:

*b*2 + c2 – 2*bc*cosα = *b*2 + *c*2 – 2*bc* · 0 = *b*2 + *с*2. (3)

Але за теоремою Піфагора маємо: *b*2 *+ с*2 *= а*2*.* (4)

Порівнявши вирази (3) і (4), отримаємо: *a*2 *= b*2 *+ c*2 – 2*bc*cosα.Теорему, доведено.

Теорему косинусів іноді називають узагальненою теоремою Піфагора. Така назва пояснюється тим, що в теоремі косинусів міститься як частковий випадок теорема Піфагора. Справді, якщо в трикутнику *ABC* кут *А* прямий, то cos *A = =* cos 90° = 0, і за теоремою косинусів одержуємо *а*2 *= b*2 *+ с*2,тобто квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

**Розв'язування задач**

При розв'язуванні цих задач слід домовитися, що сторони трикутника позначатимемо буквами *a*, *b, с,* а протилежні їм кути (при вершинах *А, В, С*)— грецькими літерами α, β, γ. Слід також згадати значення тригонометричних функцій деяких кутів (табл. 1), зазначивши, що синуси суміжних кутів рівні, а коси­нуси суміжних кутів — протилежні числа: sin(180°- α) = sinα, cos(180°- α) = = -cosα. Розв'яжемо такі задачі.

1. Дві сторони трикутника дорівнюють  см і 1 см, а кут між ними 30°. Знайдіть третю сторону трикутника. (*Відповідь.* 1 см.)
2. Знайдіть третю сторону трикутника, якщо дві інші сторони до­рівнюють 1 см і  см і утворюють кут 135°. (*Відповідь.* 5 см.)

**V. Закріплення й осмислення нового матеріалу**

**Розв'язування задач**

1. Сторони трикутника дорівнюють 1 см, 3 см і 5 см. Знай­діть кут, який лежить проти найбільшої сторони.

*Розв'язання*

Нехай у трикутнику *ABC а* = 1 см, *b* = 3 см, *с* = 5 см. За теоремою косинусів маємо: *с*2 *= b*2*+ a*2 *–* 2*ba*cosγ*,* тоді 52 = 12 +  – 2 · 1 · 3cosγ; 25 = 19 – 6cosγ; 6cosγ = - 6; cosγ =  =  = ;

тоді γ = 180° - 45° = 135°.

*Відповідь.* 135°.

1. Дві сторони трикутника *а* і *с* дорівнюють 5 см і 7 см, а кут γ дорівнює 60°. Знайдіть сторону *b.*

*Розв'язання*

За теорему косинусів маємо:

*с*2 *= а*2 *+ b*2 *–* 2*ab*cosγ,або 72 = 52 *+ b*2 – 2 · 5 · *b*cos60°,

звідси 49 = 25 + *b*2 – 5*b*, або *b*2 – 5*b* – 24 = 0. Роз­в'язавши рівняння, одержимо *b*1 = 8; *b*2 = -3. Оскільки *b >* 0,то значення *b*2не задовольняє умову задачі.

*Відповідь.* 8 см.

1. У трикутнику дві сторони дорівнюють 5 м і 6 м, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону.

*Розв'язання*

Нехай *а* = 5 м, *b* = 6 м, sinγ = 0,6. Оскільки sin2γ + cos2γ = 1, то 0,36 + cos2γ = = 1, cos2γ = 0,64 і cosγ = ±0,8.

*1-й випадок:*

cosγ = 0,8. Тоді *с*2 *= а*2 *+ b*2 – 2*ab*cosγ *=* 25 + 36 – 2 · 5 · 6 · 0,8 = 61 – 48 = 13; *с* =  м.

*2-й випадок:*

cosγ = -0,8. Тоді *с*2 *= а*2 *+ b*2 – 2*ab*cosγ= 25 + 36 + 2 · 5 · 6 · 0,8 = 61 + 48 = 109; *с =* м.

*Відповідь.* м або  м.

**VI. Домашнє завдання**

1. Вивчити теорему косинусів.
2. Розв'язати задачу.

Сторони трикутника дорівнюють 5 м, 6 м і 7 м. Знайдіть косинуси кутів трикутника.

**VII. Підбиття підсумків уроку**

**Завдання класу**

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Знайдіть невідому сторону трикутника (рис. 11).

